序 言

组合数学是一门新兴的数学分支，它研究有关离散对象在各种约束条件下的安排和配置的问题；它在理论上与数论、代数学、函数论、概率统计等有密切的关系，在国防工业、物理、化学、生物、计算机科学、空间技术、信息编码、物质结构、遗传工程、实验设计、管理科学、人工智能等二十多个领域内都有重要的应用。因而，成为受到普遍重视的学科，近二十多年来其发展尤为迅速，据不完全统计，国外发表的论文有七万篇。国

内研究者越来越多。

组合数学具有悠久的历史，现在世界上许多组合数学家认为中国是先期组合数学的发源地。这门古老的学问之所以焕发出新的活力，主要是由于计算机的出现和计算机科学的蓬勃发展，提出了一系列传统数学无法解决的理论和实际问题，这促使数学工作者以现代的理论和方法，把组合数学建立在全新的基础之上，成为计算机科学发展的一个不可分割的组成部分。因此，组合数学的发展，对于我国科学技术现代化，具有重要的现实意义。

最近我们到了河南省数学研究所、新乡师范学院、河南师范大学以及两次到贵州省讲学，特别是在贵州民族学院讲了较长时间的组合数学，我们欣喜地看到一代年轻的组合数学工作者成长起来，而要求学习掌握组合论这一门数学学科的人越来越多了，他们普遍希望能看到供理工科学生阅读的参考书，因

而我们把讲学的部分内容编写成了《组合数学》这本书。

书中介绍组合论的计数问题，以及解决计数问题的数学工具，如加法原则、乘法原则、抽屉原则、容斥原理、递推关系和母函数等。书中列举了大量组合问题和例题，并尽可能使用初等办法来解决它们，以使广大读者能够掌握组合论的思想和方法。本书内容丰富，叙述由浅入深，每章都有习题，另附习题解答。本书对初学组合论的读者是一本较好的入门书，对于中学教师、大学理工科学生和广大的工程技术人员以及从事科学研究的工作者也是一本较好的参考书。

在写这本书的过程中，我们得到中国科学院数学研究所的领导和同志们的支持，河南省数学研究所、新乡师范学院、河南师范大学和贵州民族学院等广大师生亦给予帮助和支持；本书初稿经过贵州民族学院副院长谭鑫教授、数学系林敬潘主任和贵州教育学院李长明

副院长阅读并提出宝贵意见；特别应该提到的是贵州民族学院数学系的黎鉴愚老师，他非常详细地阅读了本书初稿，提出了很多宝贵意见和建议，并对本书的编写工作给予了很大的帮助；谨在此一并表示衷心感谢。

由于时间短促，书中可能存在不少的问题，希望同志们批评指正。

陈景润

1983年12月

封面设计　刘　梅

目 录

第一章

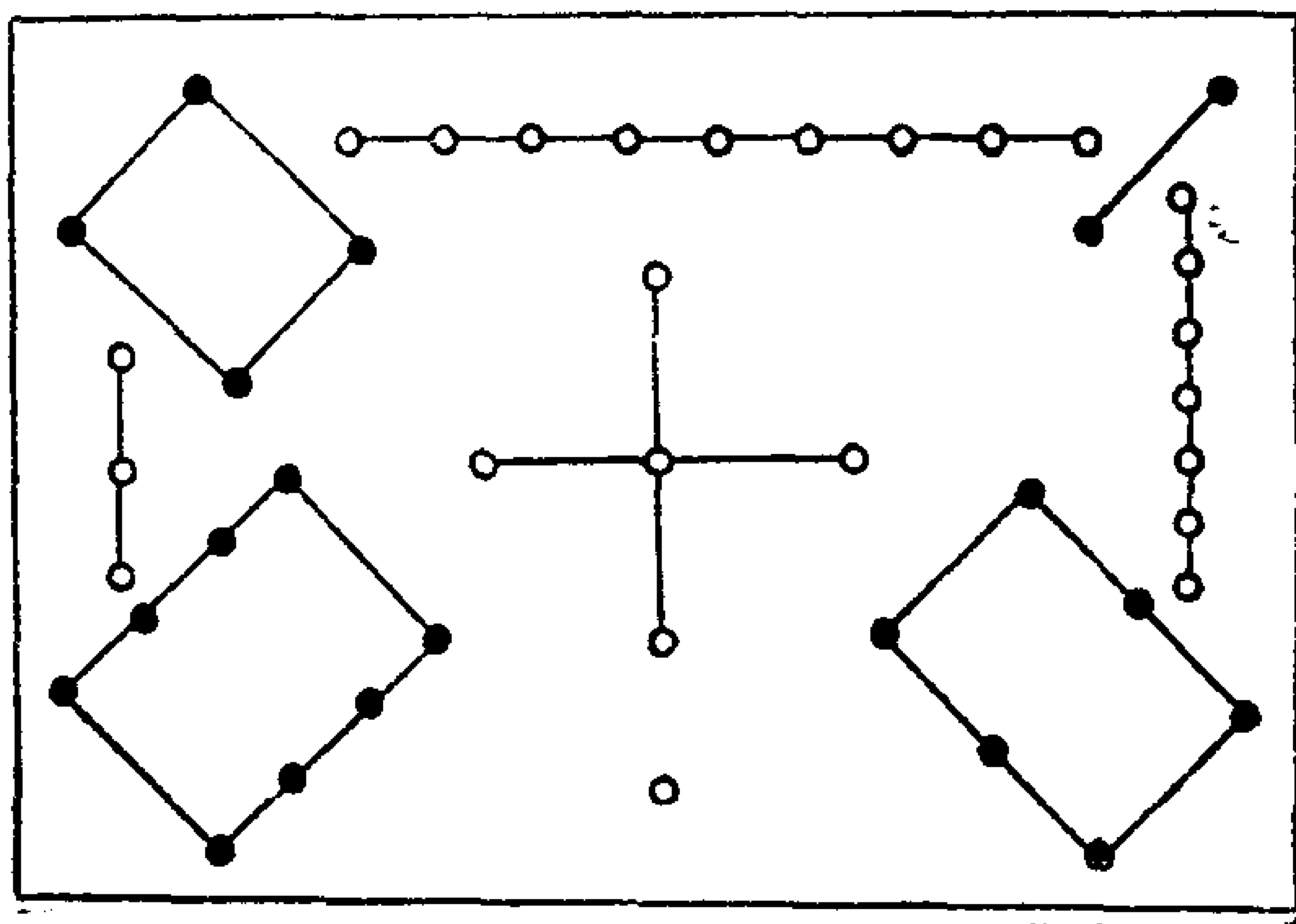
引 言

组合论又叫组合数学，它是一个历史很久的数学分支。组合论所研究的中心问题是按照一定的规则来安排一些物件有关的数学问题，当符合所要求的安排并不是很显然不存在或存在时，那么我们首要的问题就是去证明它的不存在或是去证明它的存在。当符合所要求的安排显然是存在或是我们已经证明它是存在时，那么求出这样的安排的（全部或其中不等价的）个数，以及怎样才能够把这样的安排求出来的问题，如果它还给出了最优化的标准，则还需寻求出最优的安排如此等等。上述几方面问题依次被称为存在性问题、计数问题、构造问题、最优化问题。

几千年以前人们就已经开始研究组合论，据传早在《河图》中，我国人民就已经对一些有趣的组合问题给出了正确的解答。

§1. 洛书的传说和构成

在我国人民的神话传说中，有一位人物是很著名的，他就是禹。据传早在四千多年以前，大禹为了治理那个容易泛滥成灾的黄河，曾经领导人民日夜奔忙地工作，据说几次过家门都没有时间停下去看看妻儿，这种大公无私的精神，今天看来还是令人感动。据传在大禹治好那滚滚汹涌的河流后，就有龙马从河中跃出献出河图，另外在洛河里也有一只大乌龟背驮了就是这个出名的洛书给大禹。据说这两个洛书河图都包含了治理国家的大道理。这传说历史倒很悠久，在《论语》书中，孔夫子就因为当时世风日下，人心不古，没



洛 书

有圣人之治，以致“河不出图”而感慨万千。

洛书上的每个圆圈都是代表一个1，所以如果我们把洛书上的图形用阿拉伯数字写出来就是图1。图1是由1到9这九个数所组成的具有三行三列的一个方形阵列，其中每行、每列以及每条对角线上三个数之和都等于15。即

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1

$4+9+2=15,\qquad 3+5+7=15,$

$8+1+6=15,\qquad 4+3+8=15,$

$9+5+1=15,\qquad 2+7+6=15,$

$4+5+6=15,\qquad 2+5+8=15。$

又在图1中我们有

$2+6+8+4=20,\qquad 7+1+3+9=20,$

$6+8+4+2=20,\qquad 1+3+9+7=20,$

$8+4+2+6=20,\qquad 3+9+7+1=20,$

$4+2+6+8=20,\qquad 9+7+1+3=20。$

现在我们来说明图1是怎样得到的，我们取九张同样大小的正方形纸块，并在九张纸上，写上从1到9的数目字。然后再将它们按照图2来进行排列。排列好后，将图2中的1和9位置进行对调，同时再将图2中的3和7位置进行对调。这样我们就得到了图3。现在我们把记有1、3、9、7的纸块向中间5的纸块移近。于是我们就得到了图1。这个方法记载在1275年宋朝的大数学家杨辉写的书上。书名叫做《续古摘奇算经》。他写道：“九子斜排，上下对易，左右

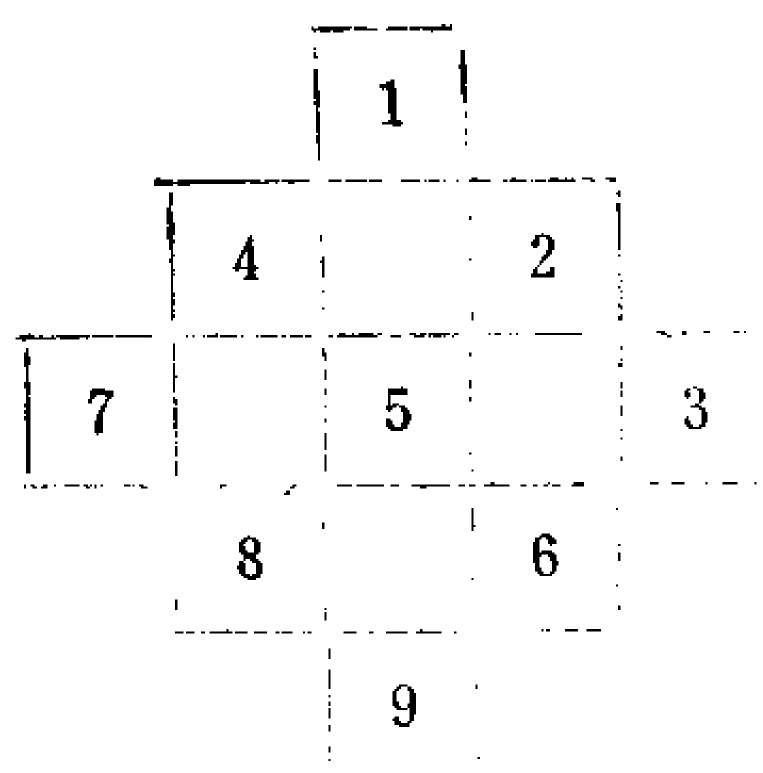


图 2

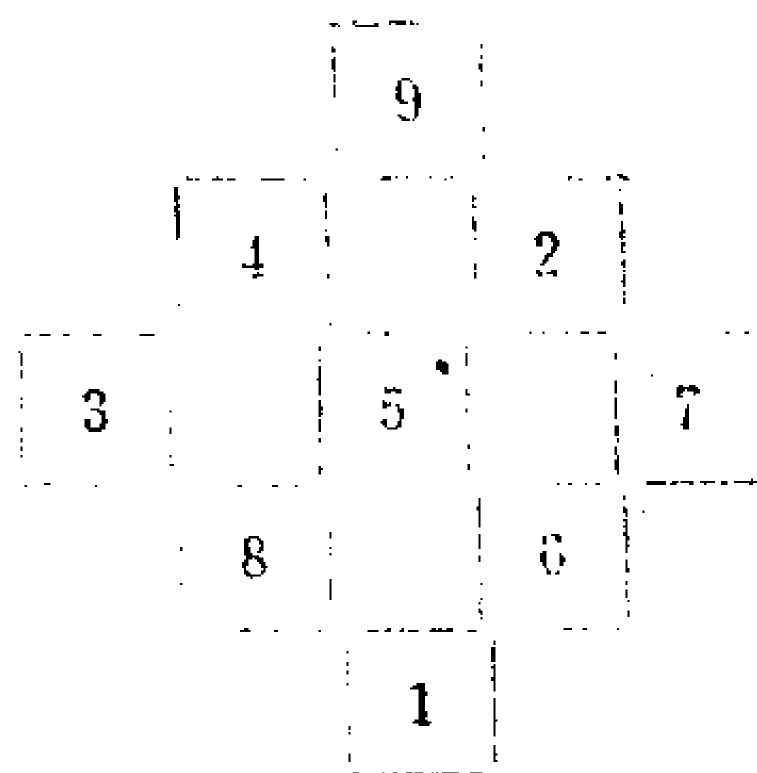


图 3

相更，四维挺进，戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足。”杨辉称这种图为“纵横图”，而且是第一个中国数学家对这方面的深入研究。后来外国人也开始研究杨辉研究过的这一种洛书，并且把它推广，即将1，2，…，n^2个自然数放进由n^2个小正方形组成的正方形方阵里，要求纵、横及对角线的和都相等，满足这些要求的方阵称为“n阶纵横图”，国外称为“n阶魔术方阵”或“n阶幻方”。这样洛书就是三阶纵横图或三阶幻方。由于

$16+2+3+13=34$，　　$5+11+10+8=34$，

$9+7+6+12=34$，　　$4+14+15+1=34$，

$16+5+9+4=34$，　　$2+11+7+14=34$，

$3+10+6+15=34$，　　$13+8+12+1=34$，

$16+11+6+1=34$，　　$13+10+7+4=34$。

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

图 4

所以图 4 就是一个四阶的纵横图，现在我们要推广杨辉的方法来算出一个五阶的纵横图，也就是说我们在二十五个小方格的上面写上从 1 开始到25。然后我们根据杨辉的九子斜排，改为二十五子斜排就得到

图 5，在图 5 中居上的有 1、6、2。居下的有24、20、25。然后再根据杨辉的上下对易，把 1 调到19的上面，把 2 调到20的上面，把 6 调到24的上面，就得到图 6 。然后再把图 6 居下的调到上面去，把24调到12的上面，把20调到 8 的上面，把25调要13的上面，这样就得到图 7 。最后我们来进行左右相更，居左的有16、21、22、居右的有4、5、10。现在我们把居左的16调到 8 的右边去，把22调到14的右边去，把21调到13的右边去。这样我们就得到图 8 。然后再把图 8 中居右的 4 调到12的左边去，把10调到18的左边去，把 5 调到13的左边去，这样就得到图 9 ，这就是我们所需要的五阶纵横图。

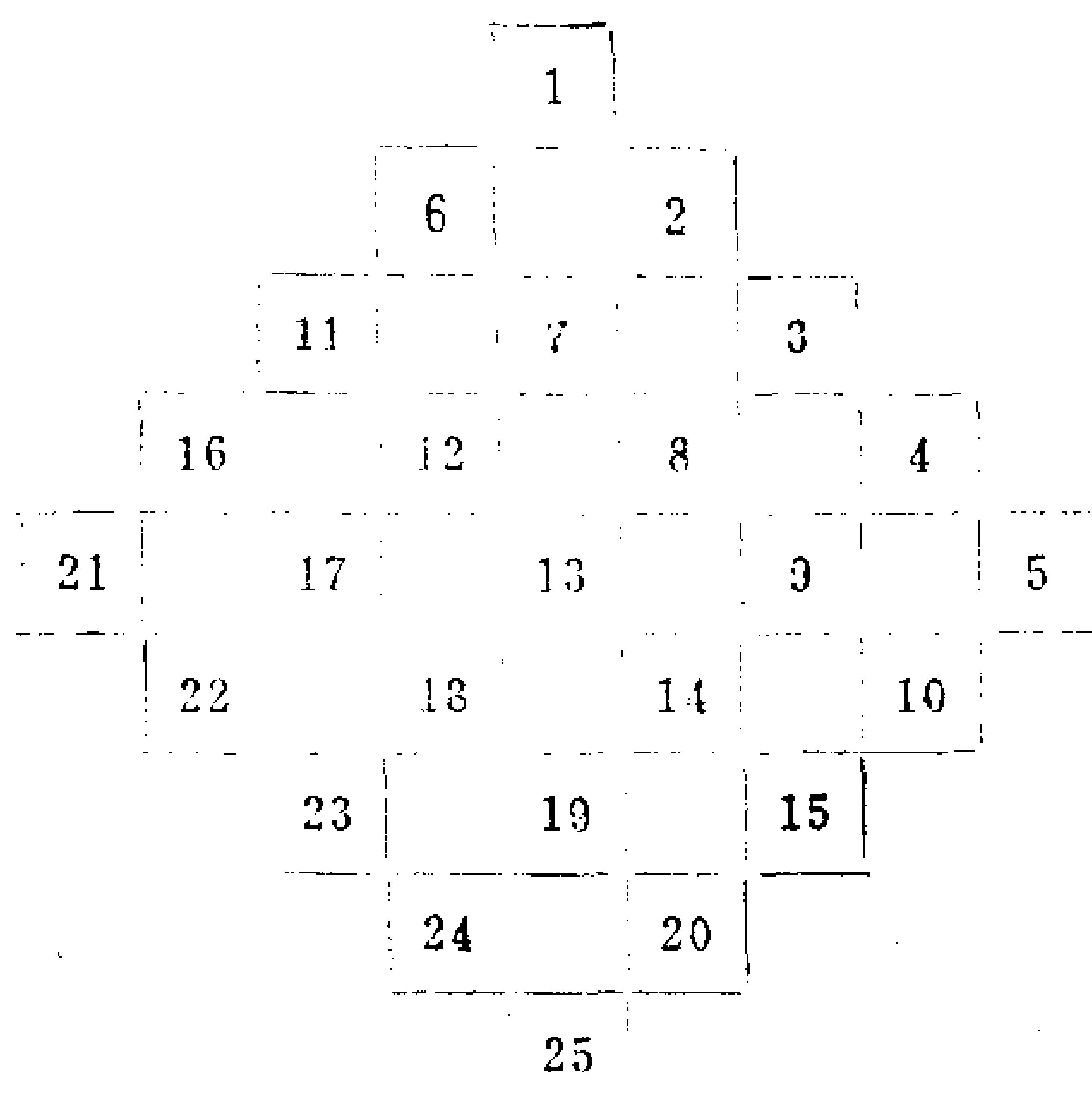


图 5

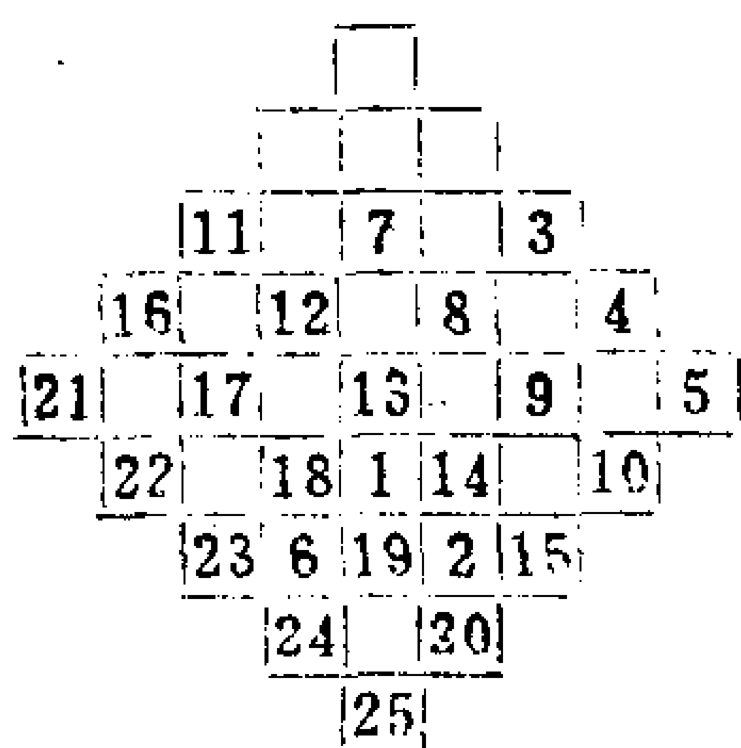


图 6

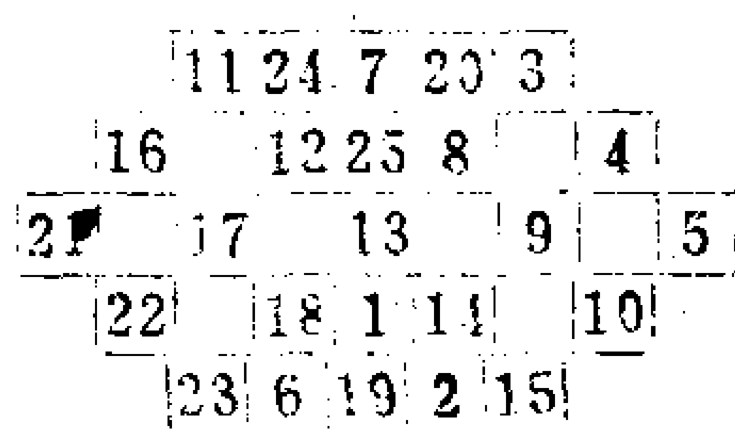


图 7

11	24	7	20	3		
	12	25	8	16	4	
17		13	21	9		5
	18	1	14	22	10	
23	6	19	2	15		

图 8

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

图 9

由于

$11+24+7+20+3=65$，　$11+4+17+10+23=65$，

$4+12+25+8+16=65$，　$24+12+5+18+6=65$，

$17+5+13+21+9=65$，　$7+25+13+1+19=65$，

$10+18+1+14+22=65$，　$20+8+21+14+2=65$，

$23+6+19+2+15=65$，　$3+16+9+22+15=65$，

$11+12+13+14+15=65$，　$3+8+13+18+23=65$。

所以图 9 就是一个五阶的纵横图。

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

图 10

由于

$27+29+2+4+13+36=111$，

$9+11+20+22+31+18=111$，

$32+25+7+3+21+23=111$，

$14+16+34+30+12+5=111$，

$28+6+15+17+26+19=111$，

$1+24+33+35+8+10=111$，

$27+9+32+14+28+1=111$，

$29+11+25+16+6+24=111$，

$$2+20+7+34+15+33=111,$$

$$4+22+3+30+17+35=111,$$

$$13+31+21+12+26+8=111,$$

$$36+18+23+5+19+10=111,$$

$$27+11+7+30+26+10=111,$$

$$36+31+3+34+6+1=111。$$

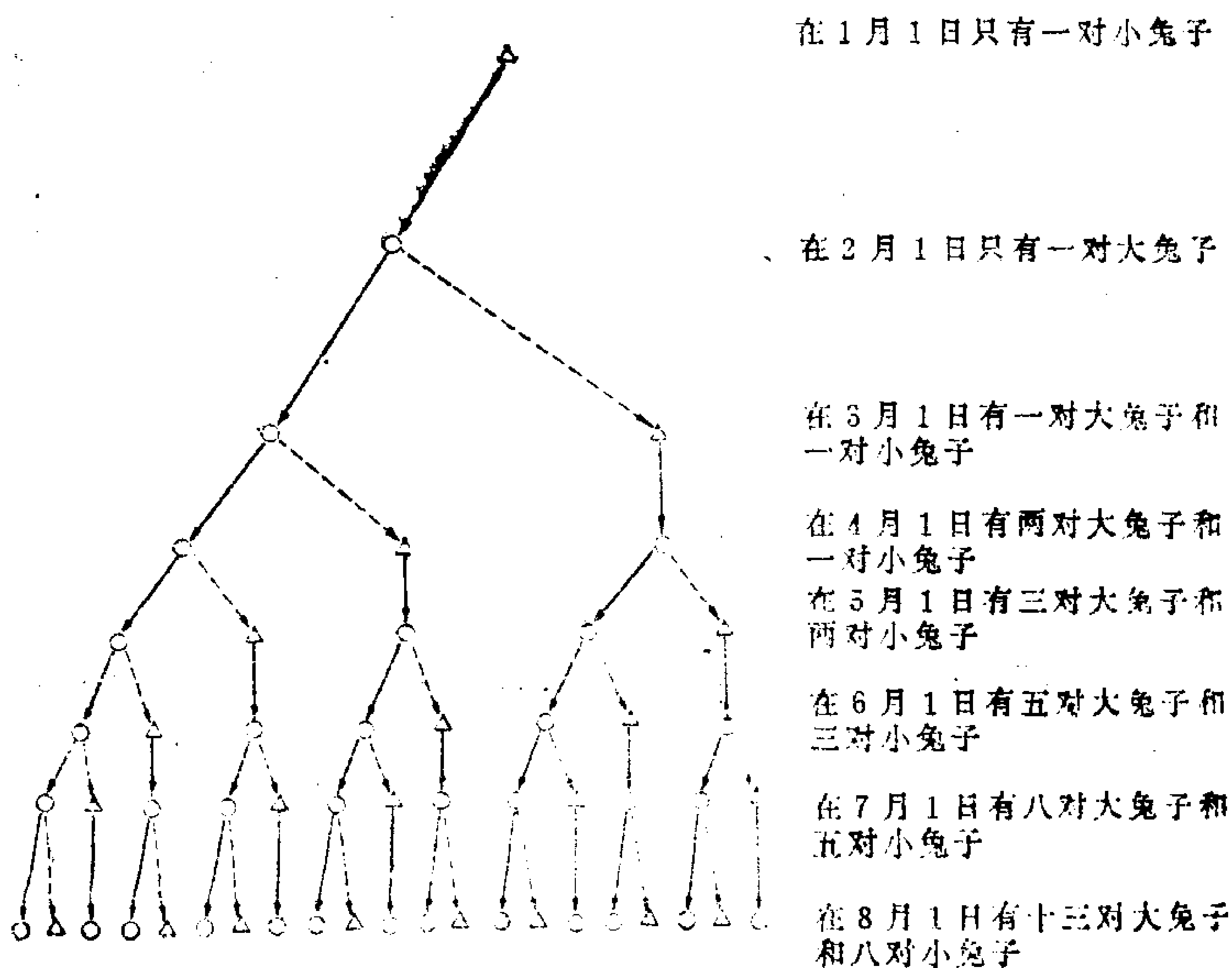
所以图10就是一个六阶的纵横图。

由于 n 阶魔术方阵中的所有整数的和是 $1+2+3+\cdots\cdots+n^2$，而这个数等于 $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$，所以 n 阶魔术方阵的每行（或每列或每条对角线）的数值都等于 $\frac{n(n^2+1)}{2}$。又我们将在习题中证明不存在有二阶的魔术方阵，若读者对魔术方阵感兴趣，可以参阅W.W.Rouse.Ball写的书，书名为《Mathematical Recreations and Essays》，该书中的第193到221页详细地讨论了这个问题。又该书是由New York; Macmillan出版社于1962年出版的。

§2．关于费波那契数列

费波那契(Leonarde Fibonacci)生于1175年，是意大利的一位很著名的数学家。在1202年他写了一本数学书，书名叫做《Liber Abaci》，在这本书中提出了一个很有名的"关于兔子生兔子的数学问题"，即有一个人把一对小兔子

放在四面都围着的地方，他想知道一年以后总共有多少对兔子生出来。假定一对小兔子经过一个月以后就能够长大成为一对大兔子而一对大兔子经过一个月以后就能够生出一对小兔子。这是一个算术问题，但是它却不能够使用普通的算术公式来进行计算。我们使用记号△来表示一对小兔子而用记号○来表示一对大兔子。不妨假定时间是由一月一日开始进行计算的。我们使用记号F_n来表示在n月一日总共有兔子的对数，即在n月一日总共有F_n对。我们可以使用下面的图形来表示兔子的繁殖情况，其中实箭头→表示一对小兔子长大成为一对大兔子或表示一对大兔子照样生长，而虚箭头…→表示生下来的一对小兔子。



我们使用记号$\overset{(大)}{F_n}$来表示在n月1日大兔子对的数目，而用$\overset{(小)}{F_n}$来表示在n月1日小兔子对的数目，并把上面的计算结果列表如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\overset{(大)}{F_n}$	0	1	1	2	3	5	8	13	21
$\overset{(小)}{F_n}$	1	0	1	1	2	3	5	8	13
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

当$n\geqslant 1$时，则由F_n、$\overset{(大)}{F_n}$、$\overset{(小)}{F_n}$的定义我们有

$$F_n=\overset{(大)}{F_n}+\overset{(小)}{F_n} \tag{1}$$

$$F_n=\overset{(大)}{F_{n+1}}, \qquad \overset{(大)}{F_n}=\overset{(小)}{F_{n+1}} \tag{2}$$

当$n\geqslant 3$时，则由(1)和(2)式我们有

$$F_n=\overset{(大)}{F_n}+\overset{(小)}{F_n}=F_{n-1}+\overset{(大)}{F_{n-1}}=F_{n-1}+F_{n-2}. \tag{3}$$

当$n\geqslant 3$时使用$F_1=F_2=1$和(3)式我们可以计算出F_n的数值。经过计算我们有下表（表在P_{10}）

使用$F_{42}=267914296$知道只由一对小兔子经过三年半时间就可以繁殖为二亿六千七百九十一万又四千二百九十六对兔子，由于兔子不会以这样快的速率生育，所以这不过是一个假设问题。

令$F_1=F_2=1$，而当$n\geqslant 3$时，令$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，数学家后来就把这数列F_1，F_2，…，F_n，…等等的数列（即

n	F_n	n	F_n	n	F_n
1	1	15	610	29	514229
2	1	16	987	30	832040
3	2	17	1597	31	1346269
4	3	18	2584	32	2178309
5	5	19	4181	33	3524578
6	8	20	6765	34	5702887
7	13	21	10946	35	9227465
8	21	22	17711	36	14930352
9	34	23	28657	37	24157817
10	55	24	46368	38	39088169
11	89	25	75025	39	63245986
12	144	26	121393	40	102334155
13	233	27	196418	41	165580141
14	377	28	317811	42	267914296

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,144, 233, 377, …）叫作费波那契数列(Fibonacci Seguence)以纪念这个最先得到这个数列的数学家，其中的F_n系表示这数列中的第n项。由于这个数列在数学、物理和化学中是一个常出现的数列，又具有很奇特的数学性质，所以美国数学会每三个月就出版一本专门对这数列进行研究的季刊，称为《费波那契季刊》，(Fibonacci Quarterly)，法国著名数学家鲁卡斯(E. Lucas)在研究数论时发现素数分布问题是和费波那契

数有关，因而他发现一种新的数列。

令$L_1=1$，$L_2=3$而当$n\geq3$时令$L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$，数学家称这数列L_1，L_2，…，L_n，…等等的数列（即1，3，4，7，11，18，29，47，76，123，199，322．521，…）为鲁卡斯数列。鲁卡斯数列和费波那契数列具有某些相同的性质。例如自从第二项以后的项是由前面二项的和组成。

§3．哥尼斯堡的七桥问题

欧拉(L. Euler 1707—1783)在1727年二十岁的时候，被俄国请去在圣彼得堡（现在改名为列宁格勒）的科学院做研究工作。差不多在这个时候，他的德国朋友告诉他一个曾经令许多人困惑的问题。原来在当时的东普鲁士有一个小城镇叫做哥尼斯堡(Konig sberg)，这城中有一条河横贯市内，河中心有两个小岛。在当时有七座桥把这两个小岛和对岸联结起来（见图10）。

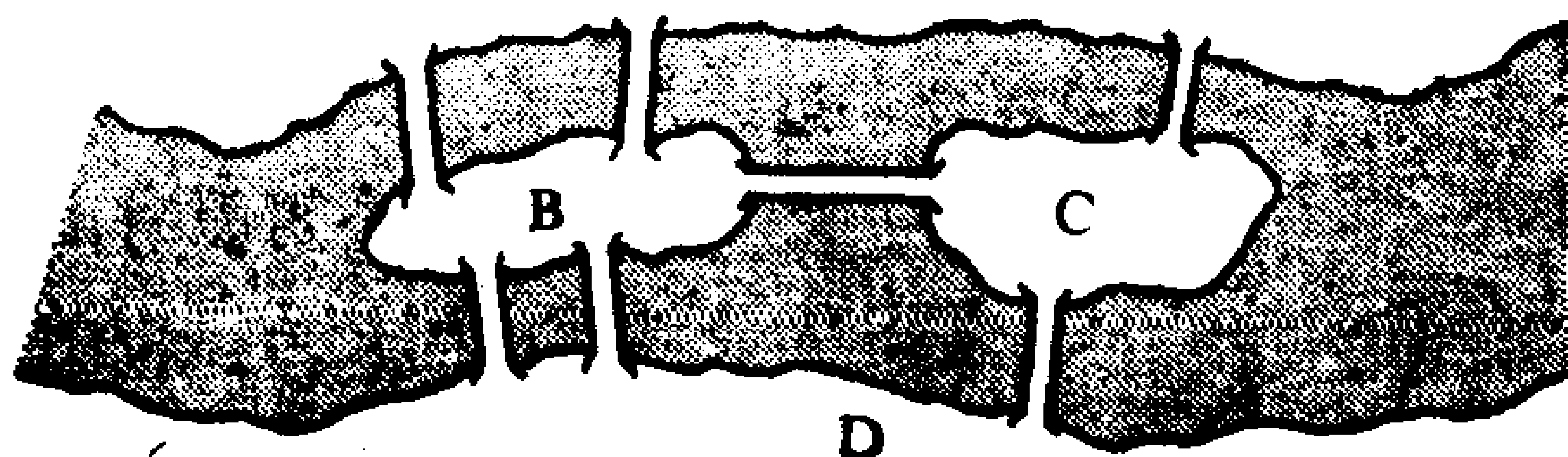


图 10

在周末当地的市民喜欢去城里散步买东西。有人曾想法子从家里出发走过所有的桥回到家里，他们想是否能够从某

座桥出发使得所走过的桥都只一次。许多人试过都不成功，现在是否有一种方法能走过。

欧拉的朋友告诉欧拉这个"哥尼斯堡七桥问题"，要他想法子解决。

欧拉并没有跑到哥尼斯堡去走走。他把这个问题化成了这样的问题来看。把两岸和小岛各缩成为一点，把桥化为边，两个顶点有边联结，当且仅当这两点所代表的地区有桥联结起来。这样欧拉就得到一个图（见图11），欧拉考虑这个图能否用一笔画成，如果能够的话，则对应的七桥问题，也就能解决了。欧拉先研究一般能一笔画成的图应该具有什么样的性质？他发现它们可以分成为两类，全部点都是偶点或是两个奇点（欧拉把进出的边总数是偶数的点叫做偶点，把进出的边总数是奇数的点叫做奇点）。

我们知道，如果一个图能够用一笔画成，那么在这个图上一定有一个点开始画，称做始点，同时也一定有终止点，称做终点，我们把图上的其他点称做过路点，因为我们要经过它，首先我们来看看过路点具有什么性质？它是有进有出的点，也就是说如果有一个边进入这点，那末就一定要有一条边从这点出去，不可能有出无进，否则它就会变成为起点，也不可能有进无出，否则它就会变成为终点。因此在过路点进出的边的总数应该是偶数，即过路点应该是偶点。

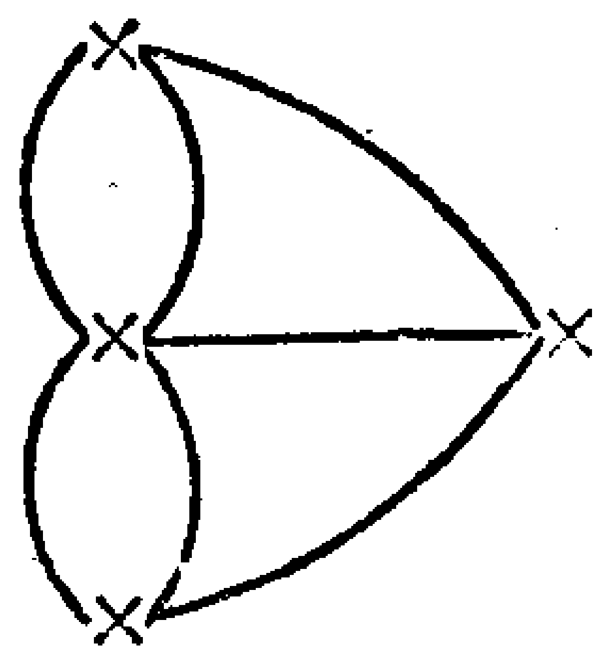


图 11

当起点和终点是同一个点时，那

么它也是属于有进有出的点型的点，因此它一定是偶点，这样就得到图上全体的点都是偶点。

如果起点和终点不是同一个点，那么它们一定是奇点。这样就知道图上应该有两个奇点。

由于在七桥问题上的图中的点，都是奇点，即共有四个奇点，所以说图11一定不能够用一笔画成。

在巴黎（Poris）的情况就不同。有一条河，河中心有两个岛，有15座桥把这两个岛和对岸联结起来（见图12）。

由于通过两岛之中任一个岛的桥的数目都是偶数，而通过两岸的任一个岸的桥的数目都是奇数，这就表示由任一个岸出发都存在有一条路，它使所有的桥都只走一次而到达另外的一个岸。

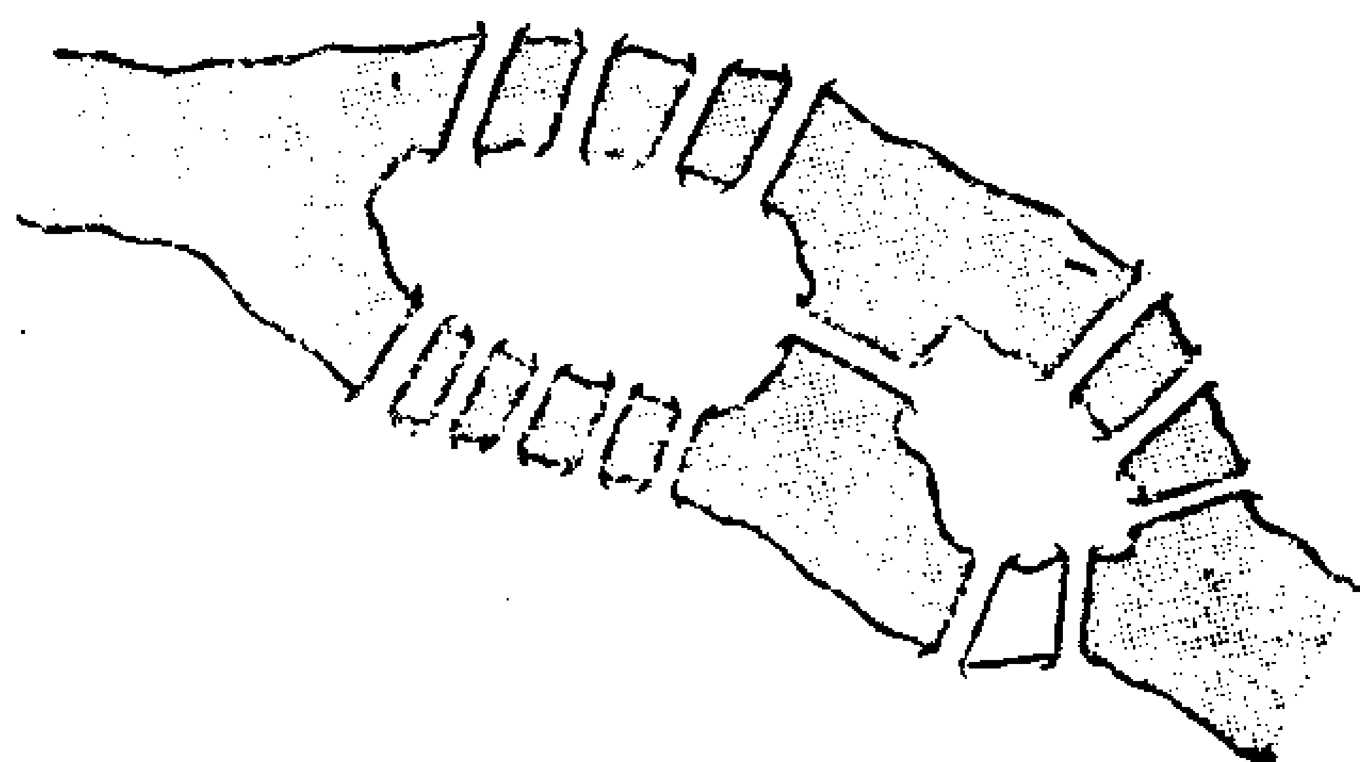


图 12

§4. 计数趣谈

十八世纪德国出了一位大科学家高斯，他生在一个很贫穷的家庭里，他父亲是一个劳苦的工人，高斯在还不会说话时就开始学习算术了，当高斯三岁的时候，有一天晚上他看着父亲计算工钱，还纠正了父亲计算中的错误。

长大以后他成为当时最杰出的数学家、物理学家和天文学家。现在电磁学中的一些单位就是用他的名字命名的。数学家们则称他为“数学王子”。

高斯八岁时进入乡村小学读书。教算术的老师是一个从城里来的人，他觉得在乡下教几个穷小孩读书真是大材小用。他认为，穷人的孩子天生都是笨蛋，这些蠢笨的孩子一定不会把书念好，如果有机会还应该打他们几下，以使自己在这枯燥的生活里增添一些乐趣。

有一天，算术老师情绪很低落，同学们看到老师非常不高兴的脸儿，都害怕起来，心想今天可能又要挨老师的打了。

老师说：“你们今天替我算算1加2加3加4加5一直加到100的和，谁算不出来就罚他不准回家吃午饭！”老师讲完这句话后，一言不发地拿起一本小说坐到椅子里看书去了。

课堂里的小朋友们拿起石板开始计算：“1加2等于3，3加3等于6，6加4等于10，10加5等于15，15加6等于21，21加7等于28，28加8等于36，……。”有些小朋友加到几个数字后就把石板上的结果擦掉了，再加下去，数字越来越大，很不好算，不少孩子的脸涨得通红，有的孩子的头上渗出了汗珠。

还不到半点钟，小高斯拿起了他的石板走上前去：“老师，答案是不是这样？”

老师头也不抬，挥着那肥厚的手，说：“去！回去再

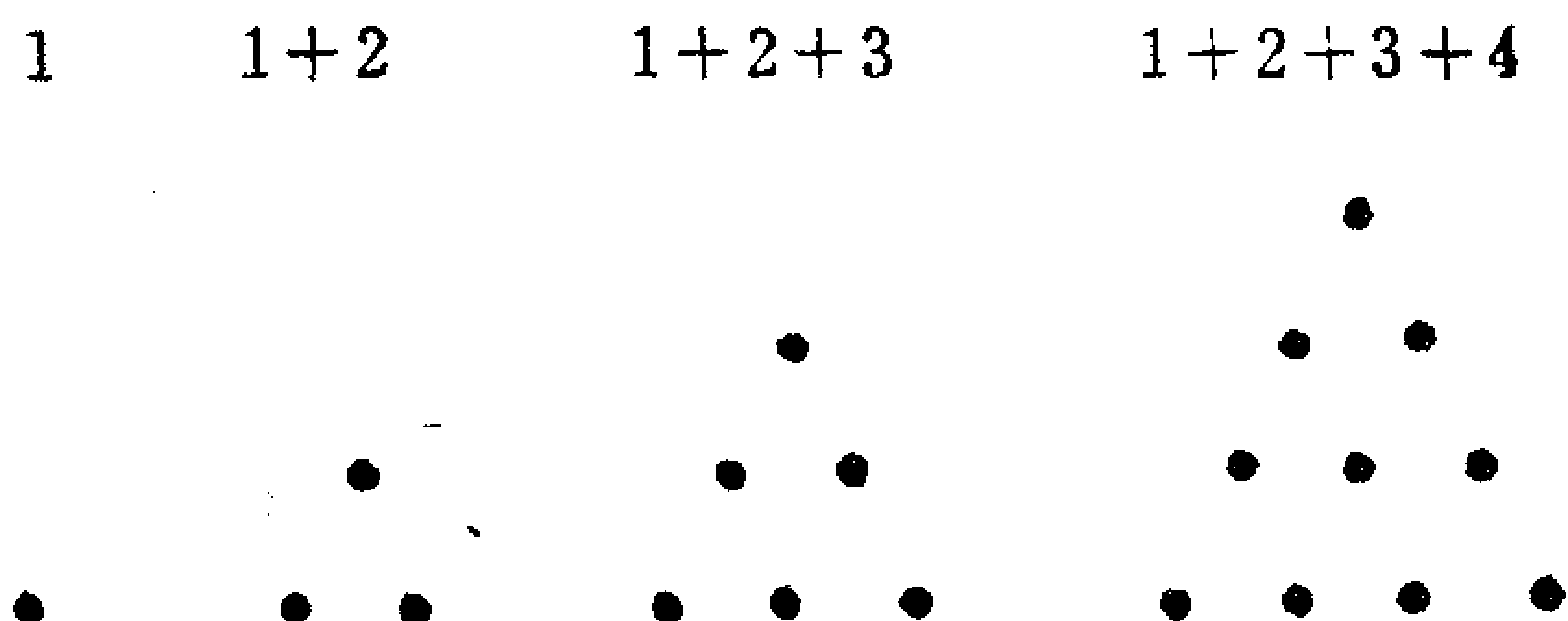
算！错了！”他想不可能这么快学生就会有答案的。

可是高斯却站着不动，把石板伸向老师面前：“老师，我想这个答案是对的。”

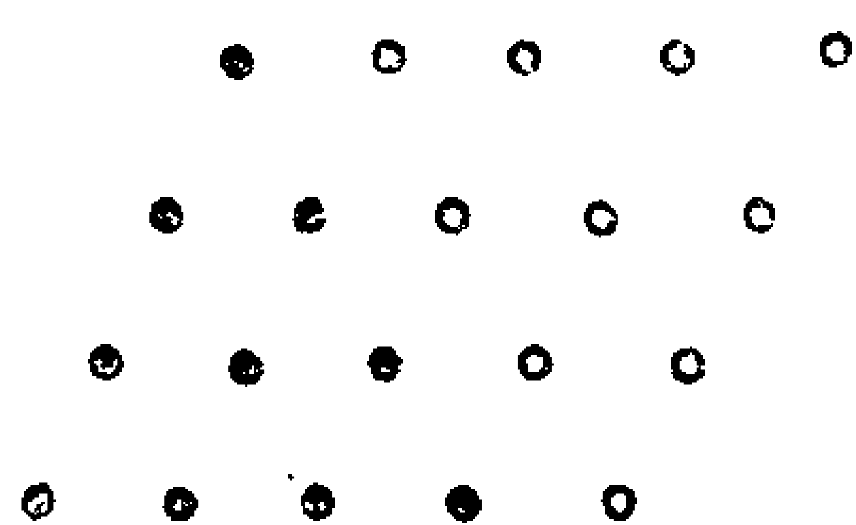
算术老师本想要怒吼起来，可是一看石板上整整齐齐写了这样的数5050，他惊奇起来，因为他自己曾经算过，得到的数值也是5050，这个八岁的小鬼怎么这样快就得到了这个数值呢？

高斯解释了他发现的一个方法，这个方法就是古时我国人和希腊人用来计算级数$1+2+3+\cdots+n$的方法。高斯的发现使老师觉得羞愧，觉得自己以前目空一切和轻视穷人家的孩子的观点是不对的，他以后也认真教起书来，并且还总从城里买些数学书自己进修并借给高斯看。在他的鼓励下，高斯以后便在数学上作了一些重要的研究了

古时的中国人和希腊人怎样算$1+2+3+\cdots+n$，宋朝数学家杨辉和他的学生们用1个圆球代表1，用2个圆球代表2，用3个圆球代表3，当$n\geqslant4$时，用n个圆球代表n。于是有



一般我们用S_n来表示$1+2+3+\cdots+n$的值，现在要知道



S_n的数目，我们可以设想有另外一个S_n(这里用白圆球来表示)，把它倒放，并和原来的S_n靠拢拼合起来，我们就得到一个平行四边形：

总共有 n 行，每一行有$n+1$个圆球，所以全部有$n(n+1)$个圆球，这是两个S_n，因此一个S_n应该是$n(n+1)\div 2$。

现在我们使用更简单的办法来计算这个和。

当$n\geqslant 6$时，利用$1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n=n+(n-1)+\cdots+4+3+2+1$

由于

$$\begin{array}{rccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ (+) & n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \\ \hline & n+1 & n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 & n+1 \end{array}$$

总共有 n 个$(n+1)$，所以我们有

$$\begin{aligned} & 2\{1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n\} \\ = & \{1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n\}+\{n+(n-1)+(n-2) \\ & +(n-3)+\cdots+2+1\} \\ = & \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n\text{个}} \end{aligned}$$

所以$1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

又当$n\geqslant 11$时，我们有

$1+3+5+7+\cdots+(2n-3)+(2n-1)$

$$=(2n-1)+(2n-3)+(2n-5)+(2n-7)+\cdots+3+1$$

由于

$$\begin{array}{lccccccc} & 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots & 2n-3 & 2n-1 \\ (+) & 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & 2n-7 & \cdots & 3 & 1 \\ \hline & 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n & 2n \end{array}$$

上面共有 n 个$2n$，所以我们有

$$2\{1+3+5+7+\cdots+(2n-3)+(2n-1)\}$$
$$=\{1+3+5+7+\cdots+(2n-3)+(2n-1)\}+\{(2n-1)+(2n-3)+(2n-5)+(2n-7)+\cdots+3+1\}$$
$$=n\cdot(2n)=2n^2$$

因此

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2 \tag{4}$$

§5. 数学归纳法

数学归纳法是在组合论中被广泛地应用的方法。数学归纳法的用途是它可以推断某些在一系列的特殊情形已经成立了的数学命题在一般的情形下是不是也真确。它的原则是这样的：

假如有一个数学命题符合下面两个条件：(1) 这个命题对$n=1$是真确的；(2)假设这个命题对任一个正整数$n=k-1$是真确的，那末我们就可以推出它对于$n=k$也真确；则我们说这个命题对于所有的正整数 n 都是真确的。

如果我们说数学归纳法的原则不是真确的，那就是说这

个命题并非对所有的正整数 n 都是真确的，那末我们一定可以找到一个最小的使命题不真确的正整数 m。由于已知这个命题对 $n=1$ 是真确的，所以 m 一定大于 1。由于 m 是一个大于 1 的正整数，所以 $m-1$ 也是一个正整数。但 m 是使命题不真确的最小的正整数，由于 $m-1$ 小于 m，所以命题对 $n=m-1$ 一定真确。这样就得出，对于正整数 $m-1$ 命题是真确的，而对于紧接着的正整数 m，命题不真确。这和数学归纳法原则中的条件(2)相冲突。

下面举一些用数学归纳法证明问题的例子。

例 1：证明 n^3+5n 是 6 的倍数（这里 n 是一个正整数）。

证明：这里的数学命题就是指 n^3+5n 是 6 的倍数。

(1) 当 $n=1$ 时有 $n^3+5n=6$，因而当 $n=1$ 时数学命题成立。

(2) 设 k 是一个 $\geqslant 2$ 的整数。令这个数学命题对 $n=k-1$ 成立，即假定

$$(k-1)^3+5(k-1)=6m$$

成立，其中 m 是一个整数。由此来推出 k^3+5k 是 6 的倍数。事实上，由归纳法假设

$$\begin{aligned}k^3+5k&=(k-1+1)^3+5(k-1)+5\\&=(k-1)^3+3(k-1)^2+3(k-1)+1+5(k-1)+5\\&=(k-1)^3+5(k-1)+3(k-1)k+6\\&=6\left(m+1+\frac{k(k-1)}{2}\right)\end{aligned}$$

由于 k 是一个整数，所以 $\frac{k(k-1)}{2}$ 也是一个整数，因而 $m+1+\frac{k(k-1)}{2}$ 是一个整数。由此说明 k^3+5k 确实是 6 的倍数。因而 n^3+5n 是 6 的倍数对所有的正整数 n 都成立。

例 2： 设 n 是一个正整数，x_1，…，x_n，y_1，…，y_n 都是实数，则

$$(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+\cdots+y_n^2) \tag{5}$$

成立。

证明： 这里的数学命题是(5) 式是真确的。

(1) 当 $n=1$ 时我们有 $x_1^2y_1^2\geqslant(x_1y_1)^2$，故(5) 式是成立的。

(2) 设 k 是一个 $\geqslant2$ 的整数。令这个数学命题对 $n=k-1$ 成立。即假定

$$(x_1y_1+\cdots+x_{k-1}y_{k-1})^2$$
$$\leqslant(x_1^2+\cdots+x^2_{k-1})(y_1^2+\cdots+y^2_{k-1}) \tag{6}$$

成立。由此来推出 $(x_1y_1+\cdots+x_ky_k)^2\leqslant(x_1^2+\cdots+x_k^2)(y_1^2+\cdots+y_k^2)$ 成立。由(6)式我们有

$$(x_1y_1+\cdots+x_{k-1}y_{k-1}+x_ky_k)^2$$
$$=(x_1y_1+\cdots+x_{k-1}y_{k-1})^2+x_k^2y_k^2+2x_ky_k(x_1y_1+\cdots+x_{k-1}y_{k-1})$$
$$\leqslant(x_1^2+\cdots+x^2_{k-1})(y_1^2+\cdots+y^2_{k-1})+x_k^2y_k^2+2x_ky_k(x_1y_1+\cdots+x_{k-1}y_{k-1}) \tag{7}$$

由于 x_i，y_i（其中 $i=1, 2, \cdots, k$）都是实数，所以我们有

$x_k^2y_i^2+x_i^2y_k^2-2x_ky_kx_iy_i=(x_ky_i-x_iy_k)^2\geqslant 0$，即 $2x_ky_kx_iy_i\leqslant x_k^2y_i^2+x_i^2y_k^2$。故得到

$$x_k^2y_k^2+2x_ky_k(x_1y_1+\cdots+x_{k-1}y_{k-1})$$
$$\leqslant x_k^2(y_1^2+\cdots+y_k^2)+y_k^2(x_1^2+\cdots+x^2_{k-1}) \tag{8}$$

由(7)和(8)式我们有

$$(x_1y_1+\cdots+x_ky_k)^2\leqslant(x_1^2+\cdots+x_k^2)(y_1^2+\cdots+y_k^2)$$

即(5) 式对于所有的正整数 n 都成立。

下面所列举的几个从数字计算中所出现的猜想问题，表面看来是很困难的，但是实际上使用数学归纳法却是很容易证明的。例如，经过计算，我们得知

$$1-2^2+3^2$$
$$=1+2+3$$
$$1-2^2+3^2-4^2+5^2$$
$$=1+2+3+4+5$$
$$1-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2$$
$$=1+2+3+4+5+6+7$$
$$1-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2$$
$$=1+2+3+4+5+6+7+8+9$$
$$1-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2-10^2+11^2$$
$$=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11$$

因而，我们猜想当$n\geqslant 3$时，则

$$1-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots-(2n)^2+(2n+1)^2$$
$$=1+2+3+4+5+\cdots+(2n)+(2n+1) \tag{9}$$

成立。现在我们使用数学归纳法来证明，当 $n\geqslant 3$ 时，(9)式

是成立的。即设$k\geqslant 3$，而当$n=k$时，(9)式成立，而来证明当$n=k+1$时，(9)式也成立。由于假设$n=k$时，(9)式是成立的，所以我们有

$$\begin{aligned}
&1-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots-(2k)^2+(2k+1)^2-(2(k+1))^2\\
&\quad+(2(k+1)+1)^2\\
&=1+2+3+4+5+\cdots+2k+(2k+1)-(2k+2)^2+(2k+3)^2\\
&=1+2+3+4+5+\cdots+2k+(2k+1)-(2k)^2-8k-4\\
&\quad+(2k)^2+12k+9\\
&=1+2+3+4+5+\cdots+2k+(2k+1)+4k+5\\
&=1+2+3+4+5+\cdots+2k+(2k+1)+2(k+1)\\
&\quad+(2(k+1)+1)
\end{aligned}$$

故当$n=k+1$时，(9)式是成立的，因而(9)式得证。

经过计算，我们得知

$$\begin{aligned}
&1-2^2\\
&=-(1+2)\\
&1-2^2+3^2-4^2\\
&=-(1+2+3+4)\\
&1-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2\\
&=-(1+2+3+4+5+6)\\
&1-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2\\
&=-(1+2+3+4+5+6+7+8)\\
&1-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2-10^2\\
&=-(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)
\end{aligned}$$

因而我们猜想，当$n\geqslant 3$时，则

$$1-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2$$
$$=-(1+2+3+4+\cdots+(2n-1)+(2n))\qquad(10)$$

成立。现在我们又使用数学归纳法来证明，当$n\geqslant3$时，(10)式是成立的。即设$k\geqslant3$，而当$n=k$时，(10)式是成立的，而来证明当$n=k+1$时，(10)式也成立。由于假设当$n=k$时，(10)式是成立的，所以我们有

$$1-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2k-1)^2-(2k)^2+(2(k+1)-1)^2$$
$$-(2(k+1))^2$$
$$=-(1+2+3+4+\cdots+2k)+(2k+1)^2-(2k+2)^2$$
$$=-(1+2+3+4+\cdots+2k)+4k^2+4k+1-4k^2-8k-4$$
$$=-(1+2+3+4+\cdots+2k)-(2k+1)-(2k+2)$$
$$=-(1+2+3+4+\cdots+2k+(2k+1)+(2k+2))$$

故当$n=k+1$时，(10)式是成立的，因而(10)式得证。

经过计算，我们得知

$$1^3+2^3=(1+2)^2$$
$$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=(1+2+3+4+5+6)^2$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3=(1+2+3+4+5+6+7)^2$$

因而我们猜想，当$n\geqslant3$时，则

$$1+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2\qquad(11)$$

成立。现在我们也使用数学归纳法来证明，当$n\geqslant3$时，(11)式是成立的。即设$k\geqslant3$，而当$n=k$时，(11)式成立，而来证

明当$n=k+1$时，(11)式也成立。由于假设当$n=k$时，(11)式是成立的，所以我们有

$$
\begin{aligned}
&1+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\
=&(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3\\
=&(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3-(1+2+\cdots+k+(k+1))^2\\
&+(1+2+\cdots+k+(k+1))^2\\
=&(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3-(1+2+\cdots+k)^2-2(1+2\\
&+\cdots+k)(k+1)-(k+1)^2+(1+2+\cdots+k+(k+1))^2\\
=&(k+1)((k+1)^2-2(1+2+\cdots+k)-(k+1))\\
&+(1+2+\cdots+k+(k+1))^2\\
=&(k+1)\left((k+1)^2-\frac{2k(k+1)}{2}-(k+1)\right)\\
&+(1+2+\cdots+k+(k+1))^2\\
=&(1+2+\cdots+k+(k+1))^2
\end{aligned}
$$

故当$n=k+1$时，(11)式是成立的，因而(11)式得证。

组合学这门学科的飞速进展，乃是最近几十年的事，这是由于多种因素促进的结果。一方面组合论受到了许多新兴的应用和理论学科的推动和刺激，例如电子计算机科学、数字通讯理论、规划论等等。另一方面，又由于组合论内部的理论的要求也使它不断地向前发展，因而使得这一门具有很长历史的数学学科现在不仅没有衰老，相反的，却是非常活跃并具有很好的成果。

习题

1.证明不存在有二阶魔术方阵。

2.证明三阶魔术方阵中，5一定要在中间。

3.是否存在一个四阶魔术方阵，具有形式

2	3	…	…
4	…	…	…
…	…	…	…
…	…	…	…

4.请用杨辉方法做一个七阶魔术方阵。

5.验证

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

是一个八阶魔术方阵。

6.验证

47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35

是一个九阶的魔术方阵。

7.验证

68	81	94	107	120	1	14	27	40	53	66
80	93	106	119	11	13	26	39	52	65	67
92	105	118	10	12	25	38	51	64	77	79
104	117	9	22	24	37	50	63	76	78	91
116	8	21	23	36	49	62	75	88	90	103
7	20	33	35	48	61	74	87	89	102	115
19	32	34	47	60	73	86	99	101	114	6
31	44	46	59	72	85	98	100	113	5	18
43	45	58	71	84	97	110	112	4	17	30
55	57	70	83	96	109	111	3	16	29	42
56	69	82	95	108	121	2	15	28	41	54

是一个十一阶的魔术方阵。

又验证

93	108	123	138	153	168	1	16	31	46	61	76	91
107	122	137	152	167	13	15	30	45	60	75	90	92
121	136	151	166	12	14	29	44	59	74	89	104	106
135	150	165	11	26	28	43	58	73	88	103	105	120
149	164	10	25	27	42	57	72	87	102	117	119	134
163	9	24	39	41	56	71	86	101	116	118	133	148
8	23	38	40	55	70	85	100	115	130	132	147	162
22	37	52	54	69	84	99	114	129	131	146	161	7
36	51	53	68	83	98	113	128	143	145	160	6	21
50	65	67	82	97	112	127	142	144	159	5	20	35
64	66	81	96	111	126	141	156	158	4	19	34	49
78	80	95	110	125	140	155	157	3	18	33	48	63
79	94	109	124	139	154	169	2	17	32	47	62	77

是一个十三阶的魔术方阵。

再验证

122	139	156	173	190	207	224	1	18	35	52	69	86	103	120
138	155	172	189	206	223	15	17	34	51	68	85	102	119	121
154	171	188	205	222	14	16	33	50	67	84	101	118	135	137
170	187	204	221	13	30	32	49	66	83	100	117	134	136	153
186	203	220	12	29	31	48	65	82	99	116	133	150	152	169
202	219	11	28	45	47	64	81	98	115	132	149	151	168	185
218	10	27	44	46	63	80	97	114	131	148	165	167	184	201
9	26	43	60	62	79	96	113	130	147	164	166	183	200	217
25	42	59	61	78	95	112	129	146	163	180	182	199	216	8
41	58	75	77	94	111	128	145	162	179	181	198	215	7	24
57	74	76	93	110	127	144	161	178	195	197	214	6	23	40
73	90	92	109	126	143	160	177	194	196	213	5	22	39	56
89	91	108	125	142	159	176	193	210	212	4	21	38	55	72
105	107	124	141	158	175	192	209	211	3	20	37	54	71	88
106	123	140	157	174	191	208	225	2	19	36	53	70	87	104

是一个十五阶的魔术方阵。

8.验证

155	174	193	212	231	250	269	288	1	20	39	58	77	96	115	134	153
173	192	211	230	249	268	287	17	19	38	57	76	95	114	133	152	154
191	210	229	248	267	286	16	18	37	56	75	94	113	132	151	170	172
209	228	247	266	285	15	34	36	55	74	93	112	131	150	169	171	190
227	246	265	284	14	33	35	54	73	92	111	130	149	168	187	189	208
245	264	283	13	32	51	53	72	91	110	129	148	167	186	188	207	226
263	282	12	31	50	52	71	90	109	128	147	166	185	204	206	225	244
281	11	30	49	68	70	89	108	127	146	165	184	203	205	224	243	262
10	29	48	67	69	88	107	126	145	164	183	202	221	223	242	261	280
28	47	66	85	87	106	125	144	163	182	201	220	222	241	260	279	9
46	65	84	86	105	124	143	162	181	200	219	238	240	259	278	8	27
64	83	102	104	123	142	161	180	199	218	237	239	258	277	7	26	45
82	101	103	122	141	160	179	198	217	236	255	257	276	6	25	44	63
100	119	121	140	159	178	197	216	235	254	256	275	5	24	43	62	81
118	120	139	158	177	196	215	234	253	272	274	4	23	42	61	80	99
136	138	157	176	195	214	233	252	271	273	3	22	41	60	79	98	117
137	156	175	194	213	232	251	270	289	2	21	40	59	78	97	116	135

是一个十七阶的魔术方阵。

再验证

192	213	234	255	276	297	318	339	360	1	22	43	64	85	106	127	148	169	190
212	233	254	275	296	317	338	359	19	21	42	63	84	105	126	147	168	189	191
232	253	274	295	316	337	358	18	20	41	62	83	104	125	146	167	188	209	211
252	273	294	315	336	357	17	38	40	61	82	103	124	145	166	187	208	210	231
272	293	314	335	356	16	37	39	60	81	102	123	144	165	186	207	228	230	251
292	313	334	355	15	36	57	59	80	101	122	143	164	185	206	227	229	250	271
312	333	354	14	35	56	58	79	100	121	142	163	184	205	226	247	249	270	291
332	353	13	34	55	76	78	99	120	141	162	183	204	225	246	248	269	290	311
352	12	33	54	75	77	98	119	140	161	182	203	221	245	266	268	289	310	331
11	32	53	74	95	97	118	139	160	181	202	223	244	265	267	288	309	330	351

31	52	73	94	96	117	138	159	180	201	222	243	264	285	287	308	329	350	10
51	72	93	114	116	137	158	179	200	221	242	263	284	286	307	328	349	9	30
71	92	113	115	136	157	178	199	220	241	262	283	304	306	327	348	8	29	50
91	112	133	135	156	177	198	219	240	261	282	303	305	326	347	7	28	49	70
111	132	134	155	176	197	218	239	260	281	302	323	325	346	6	27	48	69	90
131	152	154	175	196	217	238	259	280	301	322	324	345	5	26	47	68	89	110
151	153	174	195	216	237	258	279	300	321	342	344	4	25	46	67	88	109	130
171	173	194	215	236	257	278	299	320	341	343	3	24	45	66	87	108	129	150
172	193	214	235	256	277	298	319	340	361	2	23	44	65	86	107	128	149	170

是一个十九阶的魔术方阵。

9.证明当$n \geqslant 2$时，则我们有

(i) $F_1+F_2+\cdots+F_n=F^{-1}_{n+2}$

(ii) $F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$

10.证明当$n \geqslant 2$时，则我们有

(i) $F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F^{-1}_{2n+1}$

又当$m \geqslant 4$时，则我们有

(ii) $F_1-F_2+F_3-F_4+\cdots+(-1)^{m+1}F_m$

$=(-1)^{m+1}F_{m-1}+1$

11．证明当$n \geqslant 2$时，则我们有

$F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$

12．证明当n和m都是正整数时则我们有

$F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m-1}$

13．证明当$n \geqslant 2$时，则我们有

(i) $F^2_{n-1}+F_n^2=F_{2n-1}$

(ii) $F^2_{n+1}-F_{n-1}=F_{2n}$

(iii) $F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_{n-2}=F_{2n-1}$

(iv) $F_{3n}=F^3_{n+1}+F_n^3-F^3_{n-1}$

14．证明当$n \geqslant 1$时，则我们有

(i) $F^2_{n+1}-F_nF_{n+2}=(-1)^n$

(ii) $F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=F^2_{2n}$

15．证明当$n \geqslant 1$时，则我们有

(i) $F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\cdots+F_{2n}F_{2n+1}$

$=F^2_{2n+1}-1$

(ii) $nF_1+(n-1)F_2+\cdots+2F_{n-1}+F_n$

$=F_{n+4}-(n+3)$

(iii) 当 n 和 m 都是正整数时，则我们有

$F_{nm}\geqslant F_n{}^m$

16．证明当$n\geqslant1$时，则我们有

(i) $L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$

(ii) $F_{2n}=L_nF_n$

(iii) $F_3+F_6+F_9+\cdots+F_{3n}=\dfrac{F_{3n+2}-1}{2}$

17．求证

(i) 当$n\geqslant1$时则我们有

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(ii) 设 a 为一个实变量而 n 为任意非负整数，则我们有

$$a^2+a+1\mid a^{n+2}+(a+1)^{2n+1}$$

(iii) 设 n 是一个正整数而a_1，…，a_n是 n 个非负实数，则我们有

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

第二章

排列与组合

排列和组合是初等代数中的一段独特的内容，是数学中的重要基础知识之一，它对于我们解决许多实际问题，以及进一步学习某些数学知识（如整数的分析、行列式、概率等等），都有着重要的作用，而二项式的系数是数学中的重要基础知识之一，它对我们解决许多实际问题，以及进一步学习和研究代数、高等数学等都有着重要的作用。

§1. 排列

人们把所研究的对象叫做元素，把某些元

素的总体叫做集合，在一般情况下，我们用大写的拉丁字母A，B，C，D，…来表示集合，而用小写的拉丁字母a，b，c，d，…来表示元素，在考虑排列和组合问题时，当元素的数目较多时，我们还常常把所给的元素顺次编上号码，用符号a_1，a_2，…，a_n来代表。

定义 1：集合A的一个排列是集合A中元素的一个有序选出，当R是对排列的限制条件时，则我们把这样的排列叫做R—排列。

常见到的排列有下面的两种排列

（一）从n个各不相同的元素里，每次取出m个（其中$0\leqslant m\leqslant n$）全是不相同的元素来进行排列。人们常把这类排列简称为相异元素不许重复的排列。

（二）从n个各不相同的元素里，每次取出m个元素（可以重复）的排列。人们常把这类排列简称为相异元素可重复的排列。

例 1：从三个字母a，b，c；不许重复排列共有六种，即为

abc，acb，bac，bca，cab，cba。

例 2：写出从五个字母a，b，c，d，e，中每次取出两个字母的所有不同排列并要求

（1）不许重复　　（2）可以重复

的这种排列各有几种。

解：（1）不许重复的排列共有

ab，ac，ad，ae，

ba, bc, bd, be,

ca, cb, cd, ce,

da, db, dc, de,

ea, eb, ec, ed;

这样的排列有20种。

(2) 可以重复的排列共有

aa, ab, ac, ad, ae,

ba, bb, bc, bd, be,

ca, cb, cc, cd, ce,

da, db, dc, dd, de,

ea, eb, ec, ed, ee;

共有25种。

研究排列问题的主要目的是求出根据已知的条件所能作出的不同排列的种数。对于一些比较简单的排列问题，可以采用例 1 和例 2 中所用的方法，即把所有不同的排列全部列举出来，数出它们的种数，这样就得到答案，显然，这种方法是很繁的。人们为了找出一个简单的，能够直接求出排列种数的方法，于是就从处理不少排列问题后，所总结出来的两个有力而又直观的原则。即加法原则和乘法原则。

加法原则(Rule of sum)：如果我们能够完成事件X的方法，共有x种而完成事件$\bar{Y}$（相异于事件X）的方法，共有y种，则我们能够完成（事件X或事件$\bar{Y}$）的方法共有$x+y$种。

例 3：从北京向北走的道路共有二十条，而从北京向南走

的道路共有五十条，则离开北京的道路共计有七十条。

我们称之为原则而不叫做定理，是由于人们很难将“事件”和“相异”这两个比较模糊的概念给以很清楚的，很正确的定义，然后使用这些定义来证明定理。由例 3 我们知道，加法原则可以应用于例 3 的情况，但是加法原则不能应用于下面的这个例子。

例 4：小于10的偶数，共有四个（即2，4，6，8）；小于10的素数共有四个（即2，3，5，7）；但是，小于10的正整数，它们或者是偶数，或者是素数的个数（即2，3，4，5，6，7，8）是七个而不是八个，即在这种情况下我们不能使用加法原则，其原因是偶数和素数，并不是相异的，即这两个事件不是独立的。

加法原则可以推广到多于两个事件的情况。如果我们能够完成事件X_1的方法总共有x_1种，完成事件X_2的方法共有x_2种，完成事件X_3的方法共有x_3种，…，则我们能够完成（事件X_1或事件X_2或事件X_3或…）的方法共有$x_1+x_2+x_3+\cdots$

例 5：从北京向北走的道路共有二十条，而从北京向西走的道路共有十条，从北京向南走的道路共有五十条，而从北京向东走的道路共有二十条，则离开北京的道路共有一百条。

乘法原则(Rule of prooluct)：如果我们能够完成事件X的方法共有x种，而完成事件Y的（相异于事件X）方法共有y种，则我们能够完成（事件X和事件Y）的方法共有

xy种。

例 6：如果从北京(Beijing)到武汉（Wu Han）有三条路（即x，y，z）可以走，从武汉到广州(Can ton)有五条路可以走，试问：从北京经过武汉而到达广州，可以有几种不同的去法？

解：从北京经过武汉而到达广州共有$3\times5=15$种不同的走法，见图13

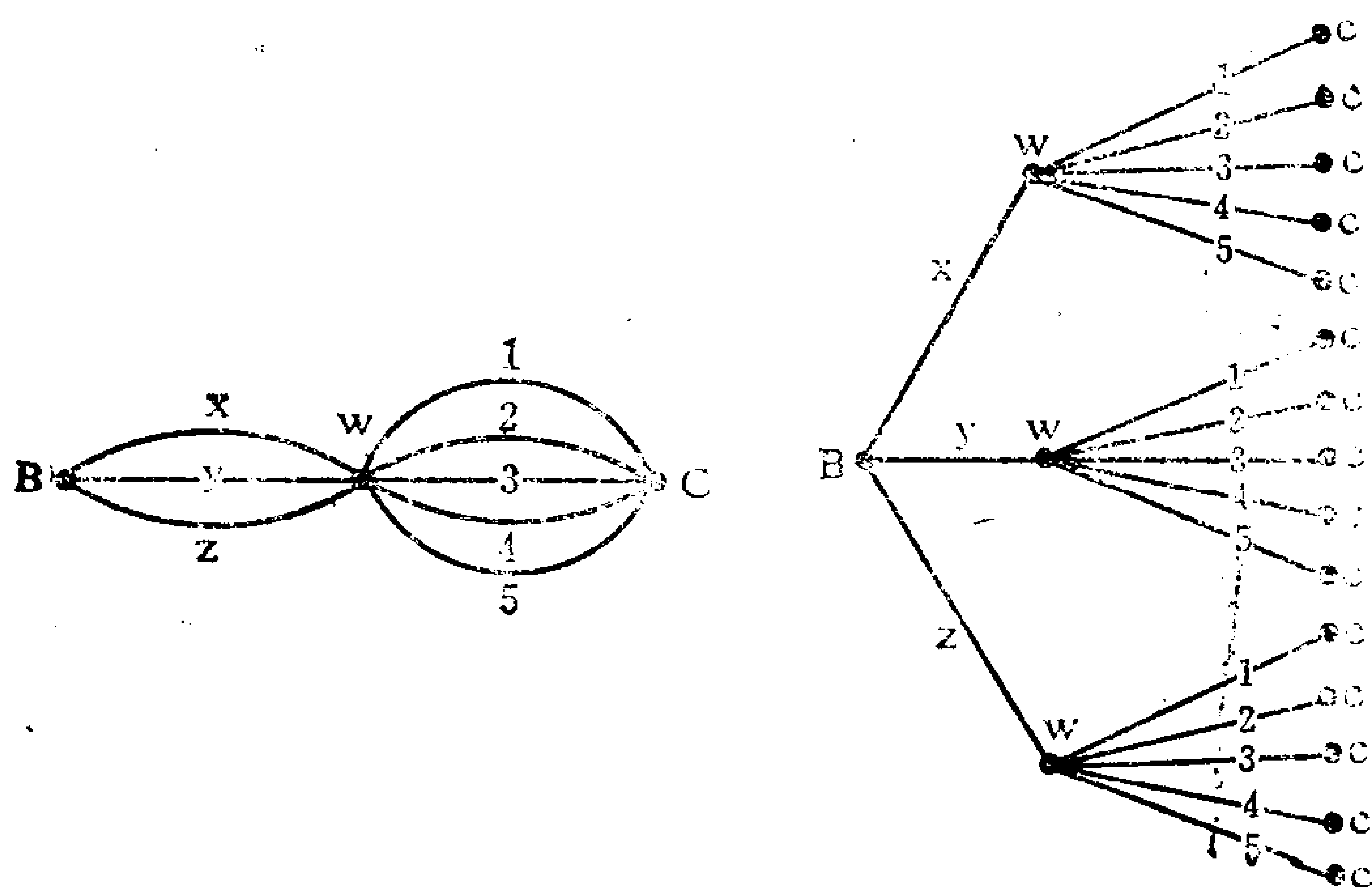


图 13

又，这15种不同的走法是

$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$x5$
$y1$	$y2$	$y3$	$y4$	$y5$
$z1$	$z2$	$z3$	$z4$	$z5$

乘法原则可以推广到多于两个事件的情况。如果我们能够完成事件X_1的方法共有x_1种，完成事件X_2的方法共有x_2

种，完成事件X_3的方法共有x_3种，…，则我们能够完成（事件X_1加事件X_2加事件X_3加…）的方法共有$x_1x_2x_3\cdots$种。

当$n\geqslant 1$时，人们为了方便起见，把从1开始的n个自然数的连乘积用记号$n!$（读作n阶乘）来表示，我们有$1!=1$，$2!=2\times1=2$，$3!=3\times2\times1=6$，而当$n\geqslant 4$时，则我们有$n!=n\cdot(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$，又令$0!=1$，把$n$个不同的元素全部取出来作排列，则这种排列称为$n$个不同元素的全排列。

当$1\leqslant r\leqslant n$时，我们把从n个不同元素中取出r个元素不许重复的排列的种数，记作$(n)_r$，则全排列的种数即为$(n)_n$。

定理 1：当$1\leqslant r\leqslant n$时，则我们有

$$(n)_r=n(n-1)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!} \tag{1}$$

证明：在一个不许重复的排列x_1，x_2，…，x_n中x_1可以取n个元素中的任何一个，故有n种取法；x_1取定之后，x_2可以取其余$n-1$个元素中的任何一个，故有$n-1$种取法；…；在x_1，x_2，…，x_i都取定之后，则x_{i+1}可以取剩下来的$n-i$个元素中的任何一个元素，故有$n-i$种取法；…；在x_1，x_2，…，x_{r-1}都取定之后，则x_r可以取剩下的$n-r+1$个元素中的任何一个，故有$n-r+1$种取法，由乘法原则知道总的取法数应该是

$$n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

故本定理成立。

定理 2：当$2\leqslant r<n$时，则我们有

$$(n)_r = n(n-1)_{r-1} \tag{2}$$

$$(n)_r = r(n-1)_{r-1} + (n-1)_r \tag{3}$$

证明：由(1) 式我们有

$$(n)_r = n[(n-1)\cdots(n-1-(r-1)+1)] = n(n-1)_{r-1}$$

故(2) 式成立。又由(1) 式我们有

$$\begin{aligned}(n)_r &= n(n-1)\cdots(n-r+1)\\ &= r(n-1)\cdots(n-1-(r-1)+1)\\ &\quad+(n-r)(n-1)\cdots(n-r+1)\\ &= r(n-1)_{r-1}+(n-1)\cdots(n-r+1)(n-1-r+1)\\ &= r(n-1)_{r-1}+(n-1)_r\end{aligned}$$

故本定理得证。

例 7：某铁路线上一共有100个大小车站，铁路局要为这条路线上准备几种不同的车票。

解：因为每张车票都标明起点站和终点站的站名，所以同样的两站间就有 2 种不同的车票，从100个车站的站名中取出两个车站站名，分起点站和终点站排起来，所以这种排列的种数即是本题的解，所以这是在100个不同元素中每次取出两个不同元素的所有排列的种数问题；于是由定理 1 即得需要准备的车票种数是

$$(100)_2 = 100 \times 99 = 9900$$

故要准备9900种不同的车票。

当$1 \leqslant r \leqslant n$时，我们把从 n 个不同的元素中取出 r 个元素可以重复的排列的种数记作U_r^n。

定理 3：当$1 \leqslant r \leqslant n$时，我们有

$$U_n^r = n^r \tag{4}$$

证明： 在一个可以重复的排列x_1、x_2，…，x_r中的任意一个元素x_i（其中$1 \leqslant i \leqslant r$）可以取 n 个元素中的任何一个，即有 n 种取法，由乘法原则知道定理 3 成立。

§2. 组合

定义 2： 集合A的一个组合是集合A中元素的一个无序选出，当R是对组合的限制条件时，则我们把这样的组合叫做R—组合。

常见到的组合有下面这两种组合

(一)从 n 个各不相同的元素里，每次取出 m 个（其中$1 \leqslant m \leqslant n$）全是不相同的元素来进行组合，人们常把这类组合简称为相异元素不许重复的组合。

(二)从 n 个各不相同的元素里，每次取出 m 个元素（可以重复的）的组合，人们常把这类组合简称为相异元素可以重复的组合。

例 8： 从三个字母a,b、c中每次取出二个不许重复的组合共有三种，即为

ab，ac，bc。

例 9： 写出从五个字母a、b，c．d，e 中每次取出二个字母的所有不同组合并要求

(1) 不许重复　　(2) 可以重复

的这种组合各有几种。

解：(1) 不许重复的组合共有

ab，ac，ad，ae，

bc，bd，be，

cd，ce，de；

这样的组合有10种。

(2) 可以重复的组合共有

aa，ab，ac，ad，ae，

bb，bc，bd，be，

cc，cd，ce，

dd，de，ee；

这样的组合共有15种。

研究组合的主要目的之一是求出根据已知条件所能作出的不同组合的种数。

当$1\leqslant r\leqslant n$时，我们把从 n 个不同的元素中取出 r 个不同的元素的组合的种数记作$\binom{n}{r}$。

定理 4：当$1\leqslant r\leqslant n$时，则我们有

$$\binom{n}{r}=\frac{(n)_r}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{5}$$

证明：设集合A是由 n 个不同元素所构成的，即$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$（其中的$x_i$而$1\leqslant i\leqslant n$都是不相同的），则集合$A$的一个由 r 个不同元素$\{x_1, \cdots, x_r\}$（其中的x_i而$1\leqslant i\leqslant r$都是不相同的）的组合就是集合A的一个由 r 个不同元素所形成的子集合，例如说$\{x_1, \cdots, x_r\}$都可以导出集合A的$r!$

个排列，反之，集合$\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$的全部 r 个不许重复的排列只导出集合A的一个由 r 个不同的元素的组合，由定理1，我们有

$$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

故得到

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

因而本定理成立。

例10：某铁路线上一共有100个大小车站，则在该铁路局总共有多少种不同的火车票价。

解：本例题的性质与例 7 有些不同，因为火车票的种数和起点站、终点站有关，从甲站到乙站和从乙站到甲站应当准备二种火车票，但是火车票的票价只与起点站和终点站之间的距离有关，从甲站到乙站和从乙站到甲站的火车票价是相同的，所以说本题的解，就是要求在100个不同元素中每次取出 2 个不同元素的所有组合的种数问题，于是由定理 4 即得到该铁路局总共有

$$\binom{100}{2} = \frac{100\times 99}{2} = 4950$$

种不同的火车票价。

从例 7 和例10中可以看出，n 个不同元素中每次取 r 个不同元素的排列与组合之间，有以下的主要区别：

在排列中，要考虑元素间的先后顺序，所以在二个的排列里，其中每一个排列都是由 r 个不同元素所构成。即使元

素完全相同，只要这些元素间的先后顺序不同，就要看成是不同的排列。在组合中，不考虑元素间的先后顺序，所以在由 r 个不同元素的组合里，只要元素完全相同而不考虑先后顺序是否不同，都是同一种组合，抓住了“有没有顺序关系”这一点，就可以正确地判断被考虑的问题是排列问题还是组合问题。

定理 5：当$1\leqslant r\leqslant n-1$时，则我们有

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \tag{6}$$

当$2\leqslant r\leqslant n-1$时我们有

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r} \tag{7}$$

证明：当$1\leqslant r\leqslant n-1$时，则由(5) 式我们有

$$\binom{n}{n-r}=\frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}$$

故(6) 式得证。当$2\leqslant r\leqslant n-1$时则由(5) 式我们有

$$\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-1-(r-1))!(r-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!r!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!(r-1)!}\left(\frac{1}{n-r}+\frac{1}{r}\right)$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!(r-1)!}\left(\frac{n}{r(n-r)}\right)$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$=\binom{n}{r}$$

故(7) 式得证，因而本定理成立。

当$1\leqslant r\leqslant n$时，我们把从 n 个不同的元素中取出 r 个元素可以重复的组合的种数记作$F_r{}^n$。

定理 6: 当$1\leqslant r\leqslant n$时，则我们有

$$F_r{}^n=\binom{n+r-1}{r}$$

证明: 我们将证明在$\{1, 2, \cdots, n\}$中所有取出 r 个整数可以重复的组合所构成的集合是和$\{1, 2, \cdots, n+r-1\}$中所有取出 r 个不可以重复的组合所构成的集合中间存在有一一对应。首先我们来考虑$\{1, 2, \cdots, n\}$中的一个由 r 个整数可以重复的组合，称之为 $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$，并设这 r 个整数所形成的集合，具有不减少的次序，即

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_r$$

现将a_1加以 0，将a_2加以 1，将a_3加以 2，…，将a_r加以$r-1$，即将$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$变成为 $\{a_1, a_2+1, a_3+2, \cdots, a_r+r-1\}$，我们这样做的目的是要构成一个没有重复的新的整数集合。可是，这样做的结果一定会使我们加大整数的数值，而$\{a_1, a_2+1, a_3+2, \cdots, a_r+r-1\}$是$\{1, 2, \cdots, n+r-1\}$中的一个子集合（如果$a_r$在加以$r-1$前是 n，则在加以$r-1$后，应是$n+r-1$）又我们容易知道新的整数集合，是没有重复的，即有

$$a_1<a_2+1<a_3+2<\cdots<a_r+r-1$$

这就证明了由$\{1, 2, \cdots, n\}$中的一个允许重复的 r 个元素

所组成的子集合就能产生出由$\{1, 2, \cdots, (n+r-1)\}$中的$r$个元素没有重复的一个子集合，现在我们还需要来证明这是一一对应。现考虑$\{1, 2, \cdots, n+r-1\}$内的没有重复的$\{b_1, b_2, \cdots, b_r\}$这一个子集合，如果它是按增加次序排列的，即$1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_r\leqslant n+r-1$令$a_i=b_i-i+1$，则我们有

$$1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_r\leqslant n$$

即$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$是$\{1, 2, \cdots, n\}$内的$r$个元素可以重复的子集合，因为这种对应关系是一一对应的，所以这两种组合的个数相同，又由于从$n+r-1$个不同元素中取出r个不同的元素的组合的种数是$\binom{n+r-1}{r}$，故本定理成立。

§3. $(n)_r$和$\binom{n}{r}$的取值范围的扩充

在$(n)_r$，$\binom{n}{r}$的定义中，由于它们有意义的范围必须要求n，r满足条件$n\geqslant r\geqslant 1$，由于便于以后在理论和应用上处理问题起见，所以有必要对n，r的取值范围进行扩充，为此，引进以下的定义式

$$(n)_r=\begin{cases}1 & \text{当}n\geqslant r=0\text{时}\\ 0 & \text{当}0\leqslant n<r\text{时}\end{cases}$$

$$\binom{n}{r}=\begin{cases}1 & \text{当} r=0 \text{时} \\ 0 & \text{当} 0\leqslant n<r \text{或} r<0\leqslant n \text{时} \\ (-1)^r\binom{|n|+r-1}{r} & \text{当} n<0 \text{且} r>0 \text{时} \\ (-1)^{n+r}\binom{|r|-1}{|n|-1} & \text{当} n<0 \text{且} r<0 \text{时}\end{cases}$$

这里自然会产生一个问题，如上扩充 n，r 的范围以后，原来的定理 2 和定理 5 是否仍然成立？下面的定理回答了这个问题。

定理 7：当$n\geqslant 1$，$r\geqslant 1$时则我们有

$$(n)_r=n(n-1)_{r-1} \tag{8}$$

$$(n)_r=r(n-1)_{r-1}+(n-1)_r \tag{9}$$

当 n 和 r 不同为 0 时则我们有

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1} \tag{10}$$

当 n 和 r 都是整数时则我们有

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \tag{11}$$

当 n 是一个整数时则我们有

$$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1 \tag{12}$$

证明：当$2\leqslant r\leqslant n$时则由(2)和(3)式知道(8)和(9)式都成立，当$r=1\leqslant n$时则由于$(n)_1=n$，$(n-1)_1=n-1$和$(n-1)_0=1$知道(8)和(9)式都成立，当$1\leqslant n<r$时则由于$(n)_r=0$，$(n-1)_r=0$和$(n-1)_{r-1}=0$，这时(8)和(9)式都成立，故当$n\geqslant 1$，$r\geqslant 1$时(8)和(9)式都成立。当$n=r\geqslant 1$时则由于

$\binom{n-1}{n}=0$和$\binom{n}{n}=\binom{n-1}{n-1}=1$知道(10)式成立，当$2\leqslant r\leqslant n-1$时则由于(7)式知道(10)式成立，对于$n\geqslant 0$，$r\geqslant 0$的其他情形而(10)式的正确性可由下表得出

n　　r	$\binom{n-1}{r}$	$\binom{n-1}{r-1}$	$\binom{n}{r}$	
$n=0<r$	$(-1)^r$	$(-1)^{r-1}$	0	(10)式成立
$1\leqslant n<r$	0	0	0	(10)式成立
$n\geqslant 2$，$r=1$	$n-1$	1	n	(10)式成立
$n=1$，$r=1$	0	1	1	(10)式成立
$n\geqslant 2$，$r=0$	1	0	1	(10)式成立
$n=1$，$r=0$	1	0	1	(10)式成立
$n=0$，$r=0$	1	$(-1)^2\binom{0}{0}=1$	1	此时(10)式不成立

又由$\binom{n}{r}$的扩充定义知道当$r\neq 0$时我们有$\binom{0}{r}=0$，故得到

$$\binom{n}{r}=\begin{cases}(-1)^r\binom{|n|+r-1}{r} & \text{当}0=n<r\text{时}\\ (-1)^{n+r}\binom{|r|-1}{|n|-1} & \text{当}0=n>r\text{时}\end{cases}$$

这就是说，在$\binom{n}{r}$的扩充定义中当$n<0$时成立的公式对于$n\leqslant 0$也成立，故有

$$\binom{n}{r}=\begin{cases}(-1)^r\binom{|n|+r-1}{r} & \text{当}n\leqslant 0<r\text{时}\\ (-1)^{n+r}\binom{|r|-1}{|n|-1} & \text{当}n\leqslant 0,\ r<0\text{时}\end{cases} \tag{13}$$

当$n\leqslant 0<r$时，则由(13)式我们有

$$\binom{n-1}{r}=(-1)^r\binom{|n-1|+r-1}{r}=(-1)^r\binom{|n|+1+r-1}{r}$$
$$=(-1)^r\binom{|n|+r}{r} \tag{14}$$

当$n\leqslant 0<1<r$时，由(13)式我们有

$$\binom{n-1}{r-1}=(-1)^{r-1}\binom{|n-1|+r-2}{r-1}$$
$$=(-1)^{r-1}\binom{|n|+r-1}{r-1} \tag{15}$$

当$n\leqslant 0<r=1$时则由于$r-1=0$故有

$$\binom{n-1}{r-1}=1=(-1)^{r-1}\binom{|n|+r-1}{r-1}$$

故此时(15)式也成立，当$n\leqslant 0<r$时则由(13)到(15)式和$|n|+r\geqslant r\geqslant 1$我们有

$$\binom{n}{r}=(-1)^r\binom{|n|+r-1}{r}$$
$$=(-1)^r\left[\binom{|n|+r}{r}-\binom{|n|+r-1}{r-1}\right]$$
$$=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$$

故当$n\leqslant 0<r$时则(10)式成立。当$n\leqslant 0$，$r<0$时则由(13)式我们有

$$\binom{n-1}{r}=(-1)^{n+r-1}\binom{|r|-1}{|n-1|-1}=(-1)^{n+r-1}\binom{|r|-1}{|n|}$$

$$\binom{n-1}{r-1}=(-1)^{n+r-2}\binom{|r-1|-1}{|n-1|-1}=(-1)^{n+r}\binom{|r|}{|n|}$$

$$\binom{n}{r}=(-1)^{n+r}\binom{|r|-1}{|n|-1}=(-1)^{n+r}\left[\binom{|r|}{|n|}-\binom{|r|-1}{n}\right]$$

$$=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$$

故当$n\leqslant 0$，$r<0$时则(10)式成立，又当$n>0>r$时，则由于$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}=\binom{n-1}{r-1}=0$，故当$n>0>r$时(10)式成立，即得当$n$和$r$不同为0时则(10)成立。

当$n=r\geqslant 1$时则由于$\binom{n}{0}=1$，故(11)式成立，当$1\leqslant r\leqslant n-1$时，则由(6)式知道(11)式成立，当$n\geqslant 0=r$时，则有$\binom{n}{r}=1=\binom{n}{n-r}$，故此时(11)式成立，当$0\leqslant n<r$时，则有$\binom{n}{r}=0=\binom{n}{n-r}$，故此时(11)式成立，因而当$n\geqslant 0$，$r\geqslant 0$时，则(11)式都成立，当$n\geqslant 0>r$时，则有$\binom{n}{r}=0=\binom{n}{n+|r|}=\binom{n}{n-r}$，故此时(11)式成立。当$n<0$，$r<0$，并且$n\leqslant r$时，则由(13)式我们有

$$\binom{n}{r}=(-1)^{n+r}\binom{|r|-1}{|n|-1}=\begin{cases}0 & \text{当}n<r\text{时}\\ 1 & \text{当}n=r\text{时}\end{cases} \tag{16}$$

当$n<r<0$时，则我们有$\binom{n}{n-r}=(-1)^{n+(n-r)}\binom{n-r-1}{|n|-1}=0$

而当$n=r<0$时则我们有$\binom{n}{n-r}=1$，故当$n<0$，$r<0$并且

$n\leqslant r$时则由(16)式知道(11)式成立，当$n<0$，$r<0$ 并且$n>r$时，则由(13)式我们有

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-r}&=(-1)^{n-r}\binom{|n|+n-r-1}{n-r}\\&=(-1)^{n-r}\binom{|r|-1}{|r|-|n|}\\&=(-1)^{n+r}\binom{|r|-1}{|n|-1}\\&=\binom{n}{r}\end{aligned}$$

故此时(11)式成立。当$n\leqslant 0\leqslant r$时，则由(13)式我们有

$\binom{n}{r}=(-1)^{r}\binom{|n|+r-1}{r}$，又此时有$n\leqslant 0$，$n-r<0$，故由(13)式我们有

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-r}&=(-1)^{2n-r}\binom{|n-r|-1}{|n|-1}\\&=(-1)^{r}\binom{|n|+r-1}{|n|-1}\\&=(-1)^{r}\binom{|n|+r-1}{r}\\&=\binom{n}{r}\end{aligned}$$

故此时(11)式成立，即当n和r都是整数时，则(11)式成立。

当$n\geqslant 0$时则由定义知道(12)式成立，当$n<0$时则由定义有$\binom{n}{0}=1$，而当$n<0$时则由(13)式我们有

$$\binom{n}{n}=(-1)^{2n}\binom{|n|-1}{|n|-1}=1$$

故(12)式得证，故本定理得证。

§4. 二项式定理和它的应用

定理 8：当 n 是一个正整数时则我们有

$$(a+b)^n=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \tag{17}$$

证明：当$k>n$时有$\binom{n}{k}=0$，故得到

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

在乘积

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{ 个}}$$

中，项$a^{n-k}b^k$是从 n 个因子$a+b$中选取 k 个（其中$0\leqslant k\leqslant n$），在这 k 个$a+b$里都取 b，而从余下来的$n-k$个因子中都选取 a 作乘积得到，因此，$a^{n-k}b^k$ 的系数为上述选法的个数，即组合数$\binom{n}{k}$，因此本定理成立。

定理 8 就是著名的牛顿二项式定理，右边的式子称为$(a+b)^n$的二项式的展开式而组合数$\binom{n}{k}$又叫做二项式系数，下面略举数例，以说明它的应用。

定理 9：当$n>0$时则我们有

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}=2^n \tag{18}$$

$$\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}(-1)^k\binom{n}{k}=0 \tag{19}$$

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{2k}=\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{2k+1}=2^{n-1} \tag{20}$$

证明： 由于当$n<k$时我们有$\binom{n}{k}=0$，故得到

$$\sum_{k>n}\binom{n}{k}=0=\sum_{k>n}(-1)^k\binom{n}{k} \tag{21}$$

在(17)式中取$a=b=1$则得到

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k} \tag{22}$$

在(17)式中取$a=1$，$b=-1$则得到

$$0=(1-1)^n=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}(-1)^k\binom{n}{k} \tag{23}$$

由(21)和(22)式知道(18)式成立，由(21)和(23)式知道(19)式成立。由(22)和(23)式相加即得$2\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}\binom{n}{2k}=2^n$，又由于当$k>\frac{n}{2}$时有$\binom{n}{2k}=0$而得到

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{2k}=\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}\binom{n}{2k}=2^{n-1} \tag{24}$$

由(22)和(23)式相减即得

$$2^n=2\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}$$

又由于当$k>\frac{n-1}{2}$时有$\binom{n}{2k+1}=0$而得到

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{2k+1}=\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}=2^{n-1} \tag{25}$$

由(24)和(25)式知道(20)式成立，故本定理成立。

定理10：当n，m和r都是整数，而$n\geqslant m\geqslant 0$时则我们有

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n-m}{k}\binom{m}{r-k}=\binom{n}{r} \tag{26}$$

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n} \tag{27}$$

证明：当$n\geqslant m\geqslant 0$，$k\geqslant 0$而$r<0$时，则由定义有

$$\binom{n}{r}=0=\binom{m}{r-k}$$

故(26)式成立。当$r>n\geqslant m\geqslant 0$时则由定义有$\binom{n}{r}=0$，当$r-k>m$时则有$\binom{m}{r-k}=0$,而当$r-k\leqslant m$时则有$k\geqslant r-m>n-m$，故此时有$\binom{n-m}{k}=0$，因而当$r>n\geqslant m\geqslant 0$时(26)式也成立。

现假设$n\geqslant r\geqslant 0$，在(17)式中取$a=1$，$b=t$则有

$$\begin{aligned}\sum_{r\geqslant 0}\binom{n}{r}t^r&=(1+t)^n=(1+t)^m(1+t)^{n-m}\\&=\sum_{l\geqslant 0}\binom{m}{l}t^l\sum_{k\geqslant 0}\binom{n-m}{k}t^k\\&=\sum_{r\geqslant 0}t^r\sum_{\substack{k+l=r\\k\geqslant 0,\ l\geqslant 0}}\binom{n-m}{k}\binom{m}{l}\\&=\sum_{r\geqslant 0}t^r\sum_{k\geqslant 0}\binom{n-m}{k}\binom{m}{r-k}\end{aligned} \tag{28}$$

当$0\leqslant r\leqslant n$时则由比较(28)式两边的系数即知(26)式成立。

现在(26)式中取$n=2n_1$，$r=n_1$，$m=n_1$则由(26)式和$\binom{n_1}{n_1-k}=\binom{n_1}{k}$就知道(27)式成立，因而本定理得证。

定理11：当$n>1$时则我们有

$$\sum_{k\geqslant 1} k(-1)^k\binom{n}{k}=0 \tag{29}$$

当$n\geqslant r\geqslant 1$时则我们有

$$\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{k}{r}\binom{n}{k}=0 \tag{30}$$

证明：在(17)式中取$a=1$，$b=-t$则有

$$(1-t)^n=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{n}{k}t^k \tag{31}$$

对(31)式两边的t求微商即得

$$-n(1-t)^{n-1}=\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k k\binom{n}{k}t^{k-1}$$

令$t=1$即得(29)式成立。我们对(31)式两边的t进行r（其中$n\geqslant r\geqslant 1$）次微商则我们有

$$(-1)^r(n)_r(1-t)^{n-r}=\sum_{k\geqslant r}(-1)^k(k)_r\binom{n}{k}t^{k-r}$$

将上式的两边同时除以$r!$，然后再由(1)和(5)式我们有

$$(-1)^r\binom{n}{r}(1-t)^{n-r}=\sum_{k\geqslant r}(-1)^k\binom{k}{r}\binom{n}{k}t^{k-r}$$

令$t=1$即得(30)式成立。因而本定理得证。

定理12：当$n>0$时，则我们有

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{n}{n+1} \tag{32}$$

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k} \tag{33}$$

证明：当$n>0$时，由于

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

及(19)式我们有

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{(-1)^{k-1}}{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{(-1)^{k-1}}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

$$=\sum_{2\leqslant k\leqslant n+1}\frac{(-1)^{k}}{n+1}\binom{n+1}{k}$$

$$=\frac{1}{n+1}\Big[\sum_{0\leqslant k\leqslant n+1}(-1)^{k}\binom{n+1}{k}$$

$$-1+(n+1)\Big]$$

$$=\frac{n}{n+1}$$

故(32)式成立。现在我们使用(32)式和数学归纳法来证明(33)式成立，当$n=1$时显见(33)式成立。现设当$n=N$（其中$N\geqslant 2$）时(33)式成立，即有

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N}{k}=\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{1}{k},$$

则我们由(10)式和(32)式有

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N+1}{k}$$

$$=\frac{(-1)^N}{N+1}+\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N+1}{k}$$

$$=\frac{(-1)^N}{N+1}+\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left[\binom{N}{k}+\binom{N}{k-1}\right]$$

$$=\frac{(-1)^N}{N+1}+\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N}{k}$$

$$+\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N}{k-1}$$

$$=\frac{(-1)^N}{N+1}+\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{1}{k}+\sum_{0\leqslant k\leqslant N-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{N}{k}$$

$$=\frac{(-1)^N}{N+1}+\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{1}{k}+1+\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{N}{k}-\frac{(-1)^N}{N+1}$$

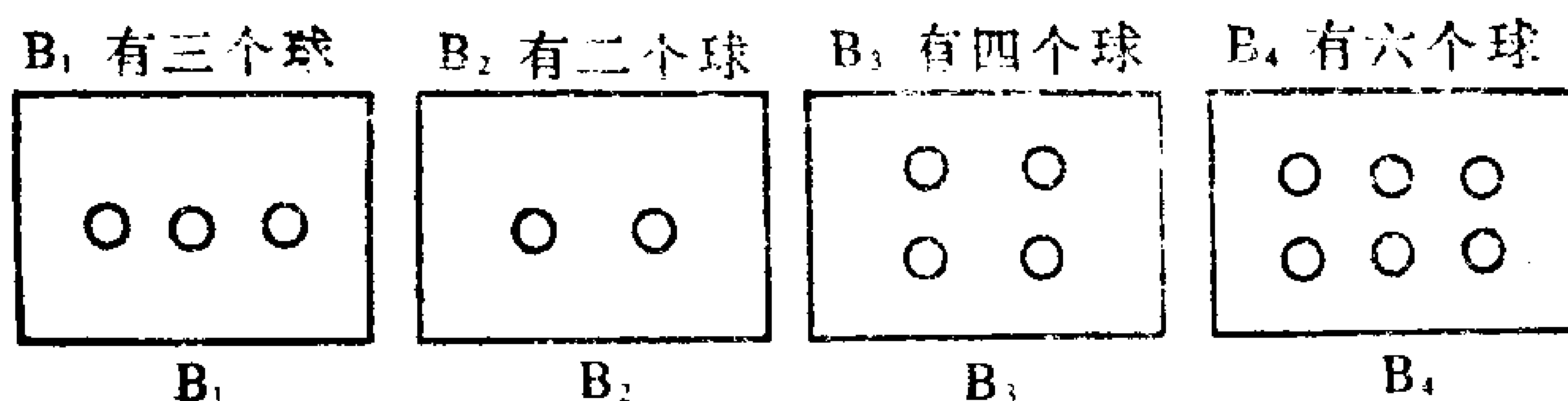
$$=\sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{1}{k}+1-\frac{N}{N+1}$$

$$=\sum_{1\leqslant k\leqslant N+1}\frac{1}{k}$$

故由数学归纳法知道(33)式成立，因而本定理得证。

§5. 多项式定理

假设我们有四个盒子（即B_1，B_2，B_3，B_4）和15个有标记的球，我们想知道共有多少种不同的方法能将这15个球置于盒中，但需要满足条件



我们知道在15个球中取出 3 个置于B_1中的方法共有$\binom{15}{3}$种，我们在剩余下来的12个球中取出 2 个置于盒B_2中的方法共有$\binom{12}{2}$种，我们能在剩余下来的10个球中取出 4 个置于盒B_3中的方法共有$\binom{10}{4}$种，最后将剩余下来的 6 个球全部置于盒B_4中的方法共有$\binom{6}{6}$种。

由乘法原则知道我们能将15个有标记的球置于B_1，B_2，B_3，B_4这四个盒中总共有

$$\binom{15}{3}\binom{12}{2}\binom{10}{4}\binom{6}{6}=\frac{15!}{3!12!}\cdot\frac{12!}{2!10!}\cdot\frac{10!}{4!6!}\cdot\frac{6!}{6!0!}$$

$$=\frac{15!}{3!2!4!6!}$$

定义 3：设$n=r_1+r_2+\cdots+r_k$，假设我们有 k 个盒子（即B_1，B_2，…，B_k）和 n 个有标记的球。我们使用记号$\binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k}$来表示有多少种的方法能将这 n 个有标记的球置于这 k 个盒中，其中有r_1个球置于盒B_1中，有r_2个球置于盒B_2中，…，有r_k个球置于盒B_k中。

使用这个记号则我们有

$$\binom{15}{3,\ 2,\ 4,\ 6}=\frac{15!}{3!2!4!6!}$$

引理 1：我们有

$$\binom{n}{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_k}=\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1}}{r_k}$$

$$=\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

证明：由上面所讨论就知道本引理成立。当只有两个盒子时，这时就是二项式的系数，即有

$$\binom{n}{r,\ n-r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}$$

我们可以将符号$\binom{n}{r,\ n-r}$解释成为从 n 个有标记的球中取出 r 个置于盒B_1中，然后再把所剩余下来的$n-r$个球全部置于盒B_2中

我们有

$$(x_1+x_2+x_3)^2=\binom{2}{2,\ 0,\ 0}x_1^2+\binom{2}{0,\ 2,\ 0}x_2^2$$

$$+\binom{2}{0,\ 0,\ 2}x_3^2+\binom{2}{1,\ 1,\ 0}x_1x_2+\binom{2}{1,\ 0,\ 1}x_1x_3$$

$$+\binom{2}{0,\ 1,\ 1}x_2x_3$$

$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

定理13（多项式定理）：当 n 是一个正整数时，则我们有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$$

$$= \sum_{\substack{r_1+r_2+\cdots+r_k=n \\ r_i\geqslant 0(i=1,\ \cdots,\ k)}} \binom{n}{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$$

其中符号$\sum$系表示和式中的r_1，r_2，…，r_k经过所有满足条件$n=r_1+r_2+\cdots+r_k$的非负整数。

证明：我们有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$$
$$=(x_1+x_2+\cdots+x_k)(x_1+x_2+\cdots+x_k)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_k)$$

上式是由n个因子相乘而成的，而它的展开式的项都是由每个因子之中各取某个x_i然后相乘而成的，即所有的项都具有形式

$$x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_k^{r_k}$$

而$r_1+r_2+\cdots+r_k=n$，又项$x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_k^{r_k}$的系数等于在这$n$个因子中先取出$r_1$个因子而在这$r_1$个因子中都是取$x_1$，然后再取出$r_2$个因子而在这$r_2$个因子中都是取$x_2$，…，最后取出$r_k$个因子而在这$r_k$个因子之中都是取$x_k$，故项$x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_k^{r_k}$的系数等于

$$\binom{n}{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_k}$$

例 1：我们有

$$(a+b+c+d)^3$$
$$=\binom{3}{3,\ 0,\ 0,\ 0}a^3+\binom{3}{0,\ 3,\ 0,\ 0}b^3+\binom{3}{0,\ 0,\ 3,\ 0}c^3$$
$$+\binom{3}{0,\ 0,\ 0,\ 3}d^3+\binom{3}{2,\ 1,\ 0,\ 0}a^2b+\binom{3}{2,0,1,0}a^2c$$
$$+\binom{3}{2,\ 0,\ 0,\ 1}a^2d+\binom{3}{1,\ 2,\ 0,\ 0}ab^2+\binom{3}{0,2,1,0}b^2c$$

$$+\binom{3}{0,\ 2,\ 0,\ 1}b^2d+\binom{3}{1,\ 0,\ 2,\ 0}ac^2+\binom{3}{0,1,2,0}bc^2$$

$$+\binom{3}{0,\ 0,\ 2,\ 1}c^2d+\binom{3}{1,0,0,2}ad^2+\binom{3}{0,1,0,2}bd^2$$

$$+\binom{3}{0,\ 0,\ 1,\ 2}cd^2+\binom{3}{1,1,1,0}abc+\binom{3}{1,1,0,1}abd$$

$$+\binom{3}{1,\ 0,\ 1,\ 1}acd+\binom{3}{0,\ 1,\ 1,\ 1}bcd$$

$$=a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d+3ab^2+3b^2c$$

$$+3b^2d+3ac^2+3bc^2+3c^2d+3ad^2+3bd^2+3cd^2+6abc$$

$$+6abd+6acd+6bcd。$$

例 2：在 $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^7$ 的展开式中的项 $x_1{}^2x_3x_4{}^3x_5$的系数是

$$\binom{7}{2,\ 0,\ 1,\ 3,\ 1}=\frac{7!}{2!0!1!3!1!}=420$$

例 3：在$(2x_1-3x_2+5x_3)^6$的展开式中的项$x_1{}^3\cdot x_2x_3{}^2$的系数是

$$\binom{6}{3,\ 1,\ 2}(2)^3(-3)^1(5)^2=-36000$$

习题

1. 请求出$\binom{10}{3}$，$\binom{16}{2}$，$\binom{14}{6}$，$\binom{15}{5}$的数值。

2. 请证明

(i) $\binom{n}{r}=\frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$

(ii) $\binom{n}{r}=\frac{n}{n-r}\binom{n-1}{r}$

3.求证

(i) $\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n}{n-1}$

(ii) $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n+1}$

4.求证

(i) $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

(ii) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{n}{n+1}$

5.求证：当$n\geqslant 1$时，则我们有

$\sum_{k\geqslant 0}(-1)^{k}\binom{n}{k}x^{k}(1+x)^{n-k}=1$

6.求证：当$n\geqslant 1$，$k\geqslant 1$时，则我们有

(i) $\binom{n-1}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k-i}(-1)^{i}$

(ii) $\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}x^{i}(1+x)^{n}=(1+x)^{n-1}(1-(-x)^{k+1})$

7.证明：当 n 是一个正整数时则我们有

$\sum_{k\geqslant 0}(-1)^{k}\binom{n}{k}\left(\frac{1+kx}{(1+nx)^{k}}\right)=0$

8.求证：当 n 和 r 都是正整数，而$r\leqslant n$时，则我们有

(i) $\sum_{k=0}^{n-r}\binom{r+k}{r}=\binom{n+1}{r+1}$

(ii) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=6\binom{n+3}{4}$

9. 求证：当 n 和 r 都是正整数，而$r\leqslant n$时，则我们有

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+r)=((r+1)!)\binom{n+1+r}{r+2}$$

10. 求证：当 n 和 m 都是非负整数而$m\leqslant n$时，则我们有

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n+1}{m}$$

11. 当 n 和 m 都是非负整数，而$m\leqslant n$时，请求出

$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}$的最简表达式。

12. 求证：当 n 和 m 都是非负整数时，则我们有

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^m\binom{n-1}{m}$$

13. 设 m 是一个整数而 n 是一个非负整数，则我们有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n}$$

14. 设r、m和 n 都是整数而$1\leqslant m<n$，则我们有

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{r}=\binom{n+1}{r+1}-\binom{m}{r+1}$$

15. 求证：当整数$n\geqslant 0$和$x\neq 1$时，则我们有

$$(1-x)^{-n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}x^k$$

16．求证：当 n 是一个非负整数时，则我们有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-2k}{n}\binom{n}{k}=2^n$$

17．求证：当 n 和 m 都是非负整数而 $m\leqslant n$ 时，则 我们有

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}(-1)^{k+m}=\begin{cases}0 & \text{当} m<n \text{时}\\ 1 & \text{当} m=n \text{时}\end{cases}$$

18．求证：当 n，m 和 l 都是非负整数时，则我们有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}\binom{n-k}{l}=\binom{n+1}{m+l+1}$$

19．求证：当 n 和 m 都是非负整数时，则我们有

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}=\begin{cases}0 & \text{当} m \text{为奇数时}\\ (-1)^{\frac{m}{2}}\binom{n}{\frac{m}{2}} & \text{当} m \text{为偶数时}\end{cases}$$

第三章

抽屜原则

§1．抽屜原则的最简形式

把$n+1$件或更多的物体放到 n 个抽屉中去，那么，至少有一个抽屉里要放进两件或者更多的物体。这就是抽屉原则的最简单形式。抽屉原则又称重迭原则，在国外又称鸽舍原则，或叫做狄利克雷(P.G. Dirichlet)原则。这一道理似乎并无惊人之处，其正确性可算至为明显，当十九世纪出现在数学中却解决了几个很重要的问题。下面我们将举些关于用抽屉原则的最简形式来解决问题的例子。

例 1：今有两组正整数，其中每一组中的所有数都小于 n（其中 n 是一个正整数），又

假设每一组中的数都是互不相同的，并且这两组数的总个数$\geqslant n$。试证，一定可以从每组中各取一数，使它们的和正好等于 n 。

证明：设这两组数分别是a_1, a_2，…，a_k；b_1，b_2，…，b_l。则由于这两组数都是不同的正整数，所以可以设$1\leqslant a_1< a_2<\cdots<a_k<n$；$1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_l<n$。现令$c_i=n-a_i$（其中$1\leqslant i\leqslant k$），则由于$a_i$是不同的，以及$a_i<n$而有 $n>c_1>c_2>\cdots>c_k\geqslant 1$。考察正整数$b_1, b_2$，…，$b_l$，$c_1$，$c_2$，…，$c_k$。由于总个数$\geqslant n$，即$l+k\geqslant n$；又由于$b_1$，$b_2$，…，$b_l$，$c_1$，$c_2$，…，$c_k$都$\geqslant 1$而又$\leqslant n-1$。现在我们把$b_1$，$b_2$，…，$b_l$，$c_1$，$c_2$，…，$c_k$看为$l+k$件物体，而把 1，2，…，$n-1$看为$n-1$个抽屉，由于$l+k\geqslant n$，故至少应有两个物体在同一个抽屉里，即有两个数相等。但由于 $b_i(i=1, 2, \cdots, l)$和c_j $(j=1, 2, \cdots, k)$都各自不相等，故落在这个抽屉里的数应分别来自$b_i(i=1, 2, \cdots, l)$和 $c_j(j=1, 2, \cdots, k)$，所以必定有某个b_i和某个c_j相等，即 $b_i=c_j=n-a_j$，故我们有$b_i+a_j=n$，因而本例题得证。

例 2：假定 n 是一个正整数，则在集合$\{1, 2, \cdots, 2n\}$中任取$n+1$个整数出来，一定存在两个整数，其中一个整数能整除另外一个整数。

证明：我们知道，任一个正整数m，都可以写成为 $2^k\cdot l$（其中 k 是非负整数，而 l 是正的奇数）。而大于等于 1 又小于等于$2n$的奇数只有 n 个，由于我们取出的是$n+1$个数，这$n+1$个数都写成为$2^k\cdot l$ 的形式后，至少有两个数所对应的

奇数 l 是相同的，而对应的 k 都是非负整数，所以对应于 k 小的那个整数可以整除对应于 k 大的另一个整数。故本例题得证。又本例题中的$n+1$不能改为小于等于 n 的数，因为在 $n+1$，$n+2$，…，$2n$这 n 个数中不存在有一个整数能整除另一个整数。

§2．抽屉原则的一般形式

我们还能扩充抽屉原则，注意到，如果有$2n+1$ 个物体放到 n 个抽屉里去，则至少有一个抽屉有 3 个（或 3 个以上）物体；如果有$3n+1$个物体放到 n 个抽屉里去，则至少有一个抽屉里有 4 个（或 4 个以上）物体；…；更一般，我们有

抽屉原则：如果将 m 个物体放到 n 个抽屉里去，则至少有一个抽屉含有$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$个物体（其中$\left[\frac{m-1}{n}\right]$表示不超过$\frac{m-1}{n}$的最大整数）。

证明：小于 m 的 n 的最大倍数是由$\frac{m-1}{n}$减去其分数部分所得的整数，这就是$\left[\frac{m-1}{n}\right]$。如果不存在有一个抽屉，它含有$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ 个物体，则每个抽屉含的物体最多是

$\left[\frac{m-1}{n}\right]$，而总共有 n 个抽屉，所以这 n 个抽屉所含的物体总数小于等于$n\left[\frac{m-1}{n}\right]\leqslant n\frac{m-1}{n}=m-1<m$。这与已知有 m 个物体矛盾，所以至少有一个抽屉里有$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$个（或更多）物体。

例 3：给定一个由任意n^2+1个不同的实数所构成的数列a_1，a_2，…，a_{n^2+1}，则一定存在一个由$n+1$个项所构成的增加数列，或者存在一个由$n+1$个项所构成的减少数列。

证明：假定不存在一个由$n+1$个项所构成的增加数列，我们将证明一定存在由$n+1$个项所构成的一个减少数列。假定对每一个 k（其中$k=1$，2，…，n^2+1），令m_k是从a_k开始的最长的增加数列的项数，因为不存在有一个由$n+1$个项所构成的增加数列，故$m_k\leqslant n$（其中$k=1$，2，…，n^2+1)，由于$m_k\geqslant 1$（其中$k=1$，2，…，n^2+1），所以说 m_1，m_2，…，m_{n^2+1}这n^2+1个整数都在 1 和 n 之间。我们把m_1，m_2，…，m_{n^2+1}看成是n^2+1个物体，放到1，2，…，n 这 n 个抽屉里，由抽屉原则，至少存在一个抽屉里有$n+1$（或更多）个物体，设这$n+1$个物体是m_{k_1}，m_{k_2}，…，$m_{k_{n+1}}$，则有 $m_{k_1}=m_{k_2}=\cdots=m_{k_{n+1}}$（其中$1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_{n+1}\leqslant n^2+1$）。下面我们来证明：对于所有的 i（其中$1\leqslant i\leqslant n$）都有$a_{k_i}>a_{k_{i+1}}$。假定存在一个 i，使得$a_{k_i}<a_{k_{i+1}}$（其中$1\leqslant i\leqslant n$），由$m_{k_{i+1}}$的定义，我们知道从$a_{k_{i+1}}$开始有一个增加数列，它的项数是

$m_{k_{i+1}}$。再由$k_i<k_{i+1}$知$a_{k_{i+1}}$在a_{k_i}之后，而我们又假设了$a_{k_i}<a_{k_{i+1}}$，所以得到从a_{k_i}开始有一个由$m_{k_{i+1}}+1$项所构成的增加数列。又由于m_{k_i}的定义，知道从a_{k_i}开始最长的增加数列的项数是m_{k_i}，又由于$m_{k_i}=m_{k_{i+1}}$，这与从a_{k_i}开始有一个由$m_{k_{i+1}}+1=m_{k_i}+1$项所构成的增加数列发生矛盾，所以得到$a_{k_i}>a_{k_{i+1}}$（其中$1\leqslant i\leqslant n$），这样，就有从a_{k_1}开始的由$n+1$个项所构成的减少数列a_{k_1}，a_{k_2}，…，$a_{k_{n+1}}$。因此本例题得证。又本例题是最好的可能结果，因为若把n^2+1项改为n^2项，就可能不存在一个由$n+1$项构成的增加数列或减少数列。例如n，$n-1$，$n-2$，…，2，1，$2n$，$2n-1$，…，$n+1$，$3n$，$3n-1$，$3n-2$，…，$2n+1$，…，n^2，n^2-1，n^2-2，…，$(n-1)n+1$，在这个项数为n^2的数列里，最长的增加数列或最长的减少数列的项数都是n。

例 4：在任意的一群人中，一定有这样两个人，他们在这群人中有相同数目的朋友。

证明：当人数为1时，不成为一个人群。故可先设这群人的个数为n而$n\geqslant2$。当$n=2$时，这两人或互相认识，或者互相不认识。当这两人互相认识时，则他们的朋友都是1个人；当他们互相不认识时，他们的朋友都是0，故本例题当$n=2$时成立。假设$n\geqslant3$，分三种情况来讨论。第一种情况，如果在这群人中每个人的朋友数都不为0时，我们用x_i（其中$1\leqslant i\leqslant n$）来表示第i个人的朋友数目，则有$1\leqslant x_i\leqslant n-1$。由于$x_1$，$x_2$，…，$x_n$共有$n$个正整数，而每个正整数的数值都大于等于1而小于等于$n-1$。所以我们可以把x_1，x_2，

…，x_n看为n个物体，而把1，2，…，$n-1$这$n-1$个数看为$n-1$个抽屉，这就是把n个物体放到$n-1$个抽屉的问题了，故至少有两个物体在同一个抽屉里。设x_k与x_l在同一抽屉里（其中$k \neq l$），即$x_k = x_l$（其中$k \neq l$），所以第k个人与第l个人的朋友数相等。即第一种情况下本例题成立。第二种情况，如只有1个人没有朋友，不妨设这个人是第n个人，而其余的人的朋友数都大于等于1，又由于这个人没有朋友，所以其余的$n-1$个人的朋友数都小于等于$n-2$。我们把x_1，x_2，…，x_{n-1}看为$n-1$个物体，把1，2，…，$n-2$这$n-2$个整数看成是$n-2$个抽屉，则由抽屉原则，至少有一个抽屉里放了两个物体。设x_k与x_l（其中$k \neq l$且k，$l \leq n-1$）在同一抽屉里，即$x_k = x_l$，故第k个人与第l个人的朋友数相等。因而在第二种情况下，本例题也成立。第三种情况，至少有两人都没有朋友时，这两人的朋友数都为0，也就是说，这两个人的朋友数目相同，故在第三种情况下，本例题结论也成立。所以本例题得证。

§3．关于Ramsey定理

下面的几个定理都需要使用抽屉原则。

定理 1：由六个人组成的一群人中，一定有三个人（或三个人以上）互相都认识，或者有三个人（或三个人以上）互相都不认识。

证明：我们在这六个人中任意固定一个人，并用字母A

来代表这个人，而把其余的五个人分成两类：第一类是与A认识的人群，我们使用记号F来代表这一类人群；第二类是与A不认识的人群，我们使用记号S来表示第二类人群。这样，我们便把其余的五个人分成为F和S这两类人群了。根据抽屉原则，至少有一类包含有三个人（或三个人以上）（这是由于$\left[\frac{5-1}{2}\right]+1=3$而得到的）。如果$F$中有三个人（或三个人以上），则这三个人（或三个人以上）可能是互相都不认识，也可能有两个人（或两个人以上）互相认识。若F中的这三个人（或三个人以上）都互相不认识，则本定理已经成立；故不妨设F中有两个人（或两个人以上）互相认识，那么再把A放到这两个人（或两个人以上）中去，则由于这两个人（或两个人以上）都与A认识而得到三个人（或三个人以上）都互相认识了，因而本定理也成立；如果F中最多只有两个人，则在S中含有三个人（或三个人以上）。若S中三个人（或三个人以上）互相都认识，则本定理已成立；若S中有两个人（或两个人以上）互相不认识，则把A加到这两个人（或两个人以上）中去，就得到三个人（或三个人以上）互相不认识了，因而本定理也成立。综上所述，本定理得证。

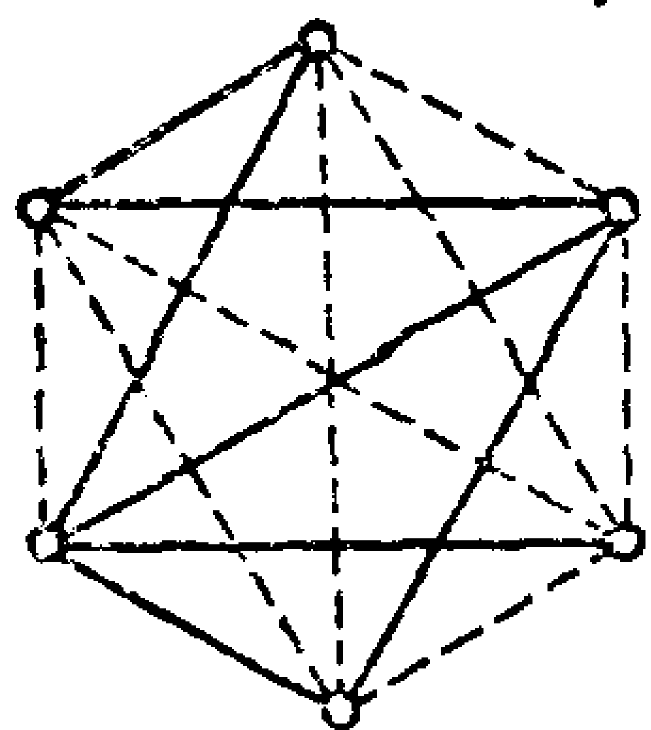


图 1

如果我们使用圆圈来表示人，又用线段把圆圈两两连接起来，其中实线段表示这一对人是互相认识的，用

虚线段表示这一对人是互相不认识的，则图1是这六个人可能的情况之一。

定理1告诉我们，任何一个由六个圆圈构成的图形中，如用实线或虚线将这六个圆圈都两两连接起来，则有一个（或一个以上）由三条实线构成的三角形或者有一个（或一个以上）由三条虚线构成的三角形。我们把这两种三角形都称之为纯三角形。

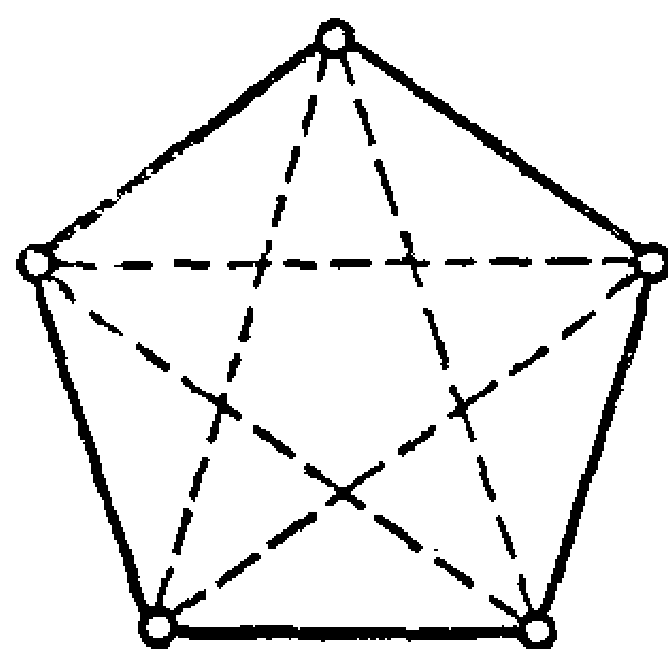
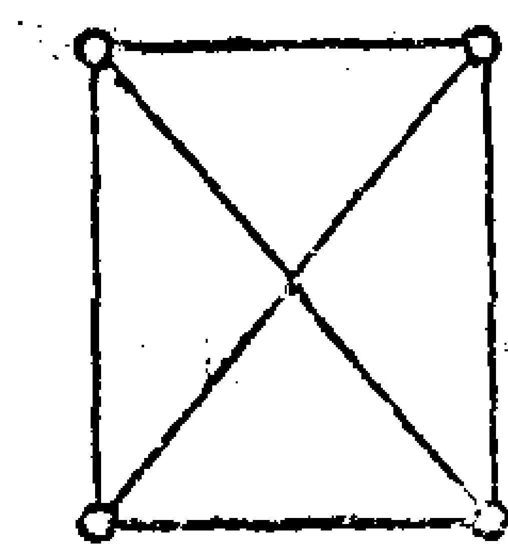


图 2

当只有五个人时，我们可以有图2。在图2中，显然没有纯三角形。

因而，在定理1中，如果将六改为五时，则有可能不存在有纯三角形，所以说在这个意义下，这个定理的结果是最好的。



或

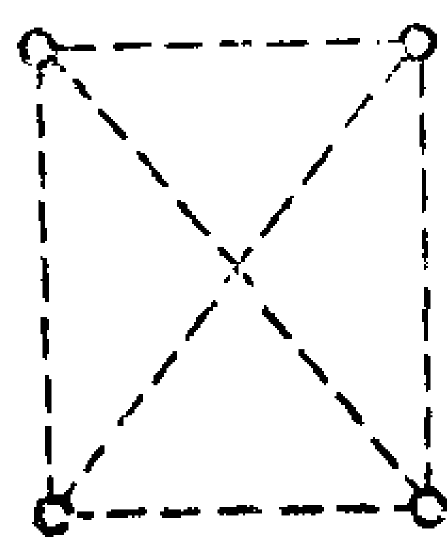


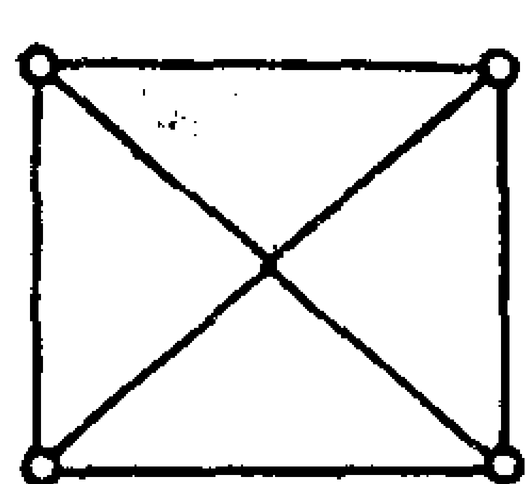
图 3

现在我们再将定理1加以推广。我们把四个人互相都认识或者四个人互相都不认识的情况用图3来表示

定理 2：由十个人所构成的一个人群中，或者存在有四个（或四个以上）人互相都认识，或者存在有三个（或三个以上）人互相都不认识。

证明：我们在这十个人中任意固定一个人，并用符号A来表示这个人，而把其余九个人分为两类：第一类是与A不认识的人群，我们使用符号S来表示；第二类是与A认识的人群，我们使用符号F来表示。如果S中有四个（或四个以

上）人，则或者存在有四个（或四个以上）人互相都认识，或者存在有两个（或两个以上）人互相不认识。当有四个（或四个以上）人互相都认识时，则本定理已经成立。如果 S 中有两个（或两个以上）人互相不认识时，则把 A 加到这两个（或两个以上）人中去，就得到有三个（或三个以上）人互相不认识了，因而本定理也成立；如果 S 中最多有三个人，则由抽屉原则知道 F 中至少有 6 个人，故由定理 1 得到：F 中有三个（或三个以上）人互相都认识，或者有三个（或三个以上）人互相都不认识。当有三个（或三个以上）的人互相都不认识时，本定理已经成立了；当有三个（或三个以上）人互相都认识时，把 A 加到这三个（或三个以上）人中去，就得到有四个（或四个以上）人互相都认识了，因而本定理也成立。综上所述，本定理得证。



或

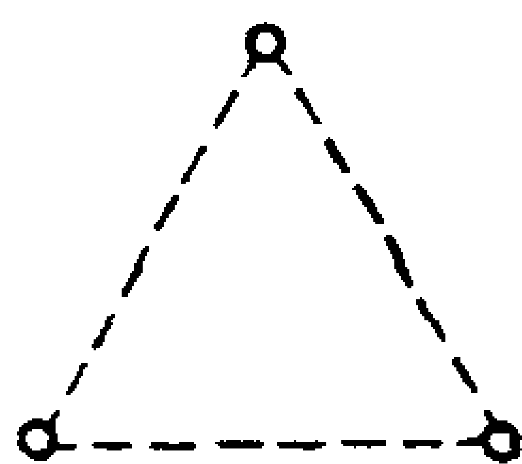


图 4

我们可以用图 4 来表示定理 2 的结论。

用同样的方法，我们可以得到

定理 3：由十个人组成的人群中，或者存在有四个（或四个以上）人互相都不认识，或者存在有三个人（或三个人以上）互相都认识。

我们可以用图 5 来表示定理 3 的结论。

由定理 2 和定理 3，我们不难推出

定理 4：由二十个人所组成的人群中，或者存在有四个

人（或四个人以上）互相都认识，或者存在有四个人（或四个人以上）互相都不认识。

这个结论可以用图3来表示。

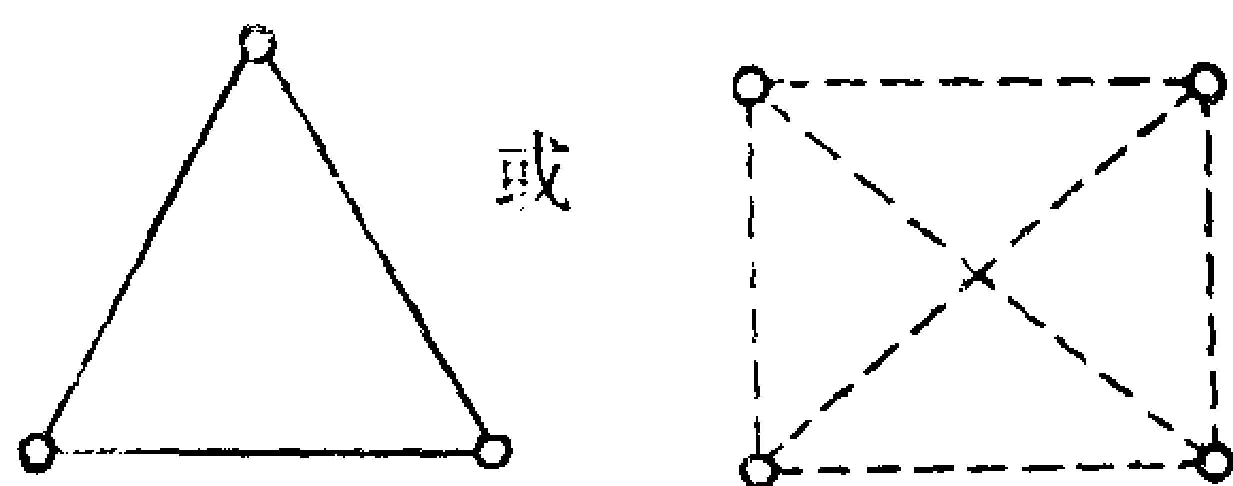


图 5

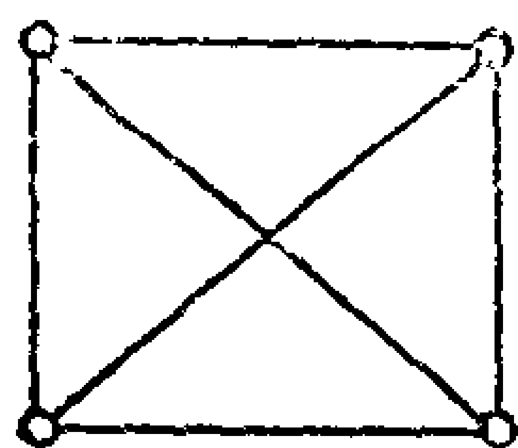
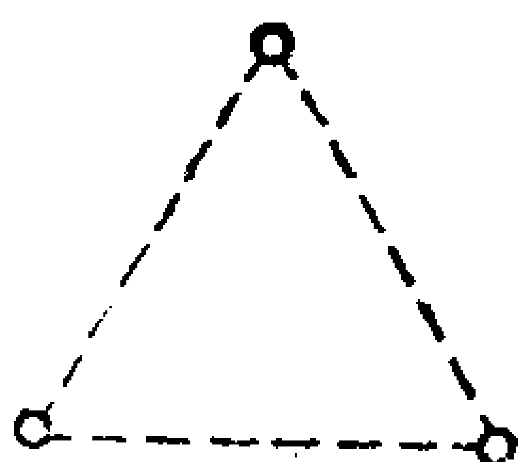
证明：我们在这二十个人中任意固定一个人，并把这个人记为A，而其余的十九个人可以分成两类；第一类是与A认识的人群，记为F；第二类是与A不认识的人群，记为S。由于$\left[\frac{19-1}{2}\right]+1=10$，所以这两类中至少有一类包含有十个人（或十个人以上）。

若F中包含有十个人（或十个人以上），则由定理3，我们有图5：



若存在有四个人（或四个人以上）互相都不认识，则本定理已经成立了；若有三个人（或三个人以上）互相认识，我们把A加进去，就得到有四个人（或四个人以上）互相都认识，因而本定理也成立。

若S中有十个人（或十个人以上），则由定理2我们有图4。


或


如果有四个人（或四个人以上）互相都认识，则本定理已经成立了；如果有三个人（或三个人以上）互相都不认识，我们把A加进去，就有四个人（或四个人以上）互相都不认识了，因而本定理也成立。由以上几个方面的讨论，即知本定理得证。

我们用记号$N(a, b)$来表示这样的一个人群中的人数，在这个人群中或者有a个人（或a个以上的人）互相都认识，或者有b个人（或b个以上的人）互相都不认识。我们称$N(a, b)$为Ramsey数。由定理1，我们有

$$N(3, 3)\leqslant 6;$$

由定理2，我们有

$$N(4, 3)\leqslant 10;$$

由定理3，我们有

$$N(3, 4)\leqslant 10;$$

由定理4，我们有

$$N(4, 4)\leqslant 20$$

这些数目给出了$N(a, b)$的上界，但它们不一定是最好的结果。例如，已经有人证明了

$$N(4, 4)\leqslant 19。$$

定理 5：我们有

$$N(a,\ b)=N(b,\ a) \tag{1}$$

$$N(a,\ 2)=a \tag{2}$$

证明：由对称性，我们立即得到(1) 式成立。现在我们只需证明(2) 式成立。若在 a 个人中全是互相都认识的，则(2) 式已经成立了，否则至少有两个人互相不认识，故 (2) 式也成立，所以本定理得证。

定理 6：对所有$\geqslant 2$的整数a，b，我们都有：

$N(a,\ b)$是一个有限数（这个数只与 a 和 b 有关），并且有

$$N(a,\ b)\leqslant N(a-1,\ b)+N(a,\ b-1) \tag{3}$$

证明：我们先来证明(3)式，而当(3)式已经证明是成立时，立即可知$N(a,\ b)$是一个有限数了。在 $N(a-1,\ b)+N(a,\ b-1)$个人中，我们先固定任意一个人，并把这个人记为A，而其余的 $N(a-1,\ b)+N(a,\ b-1)-1$ 个人中，可以分为两类：第一类是与A认识的人群，我们用 F 来表示；第二类是与A不认识的人群，我们用S来表示。则或者在F中有$N(a-1,\ b)$个（或更多的）人，或者在 S 中有$N(a,\ b-1)$个（或更多的）人。否则，F中的人数$\leqslant N(a-1,\ b)-1$，而且在S中的人数$\leqslant N(a,\ b-1)-1$，故F与S中的总人数$\leqslant N(a-1,\ b)+N(a,\ b-1)-2$，这与已知的$F$和$S$中的总人数为$N(a-1,\ b)+N(a,\ b-1)-1$而发生矛盾。

如果在F中有$N(a-1,\ b)$个人，则由$N(a-1,\ b)$的定义，我们有$a-1$个（或更多的）人互相都认识，或者有b个

（或更多的）人互相都不认识。若有 b 个（或更多的）人互相都不认识，则(3) 式已经成立了。若有 $a-1$ 个（或更多的）人互相都认识，我们把 A 加进去，就有 a 个（或更多的）人互相都认识了，因而(3) 式也成立。

如果 S 中有 $N(a, b-1)$ 个人，则由 $N(a,b-1)$ 的定义，在这 $N(a, b-1)$ 个人中，有 a 个（或更多的）人互相都认识，或者有 $b-1$ 个（或更多的）人互相都不认识。若有 a 个（或更多的）人互相都认识时，(3) 式已经成立了，若有 $b-1$ 个（或更多的）人互相都不认识时，我们把 A 加进去，就得到有 b 个（或更多的）人互相都不认识了，因而(3) 式也成立。由上述讨论，本定理得证。

请注意：(3) 式中，并非表示等号一定可能成立。事实上已经有例子使等号不成立了。例如，我们已经知道有下面的定理，即是

定理 7：当 $N(a-1, b)$ 和 $N(a, b-1)$ 都是偶数时，则我们有

$$N(a, b)<N(a-1, b)+N(a, b-1)-1 \tag{4}$$

证明：由于证明过程很繁杂，在这里我们就不给予证明了，读者若感兴趣，可参阅《BASIC TECHNIQUES OF COMBINATORIALTHEORY》书中的第171页。该书作者为D.I.A.COHEN，于1978年出版。

定理 8：我们有

$$N(3, 3)=6 \tag{5}$$

$$N(3, 4)=N(4, 3)=9 \tag{6}$$

证明：(5) 式的证明可见定理 1。现在我们来证明 (6) 式。

由于(2)和(5)式我们有$N(4,2)=4$，$N(3,3)=6$，而 4 与 6 都是偶数，故由(1) 和 (4) 式我们有

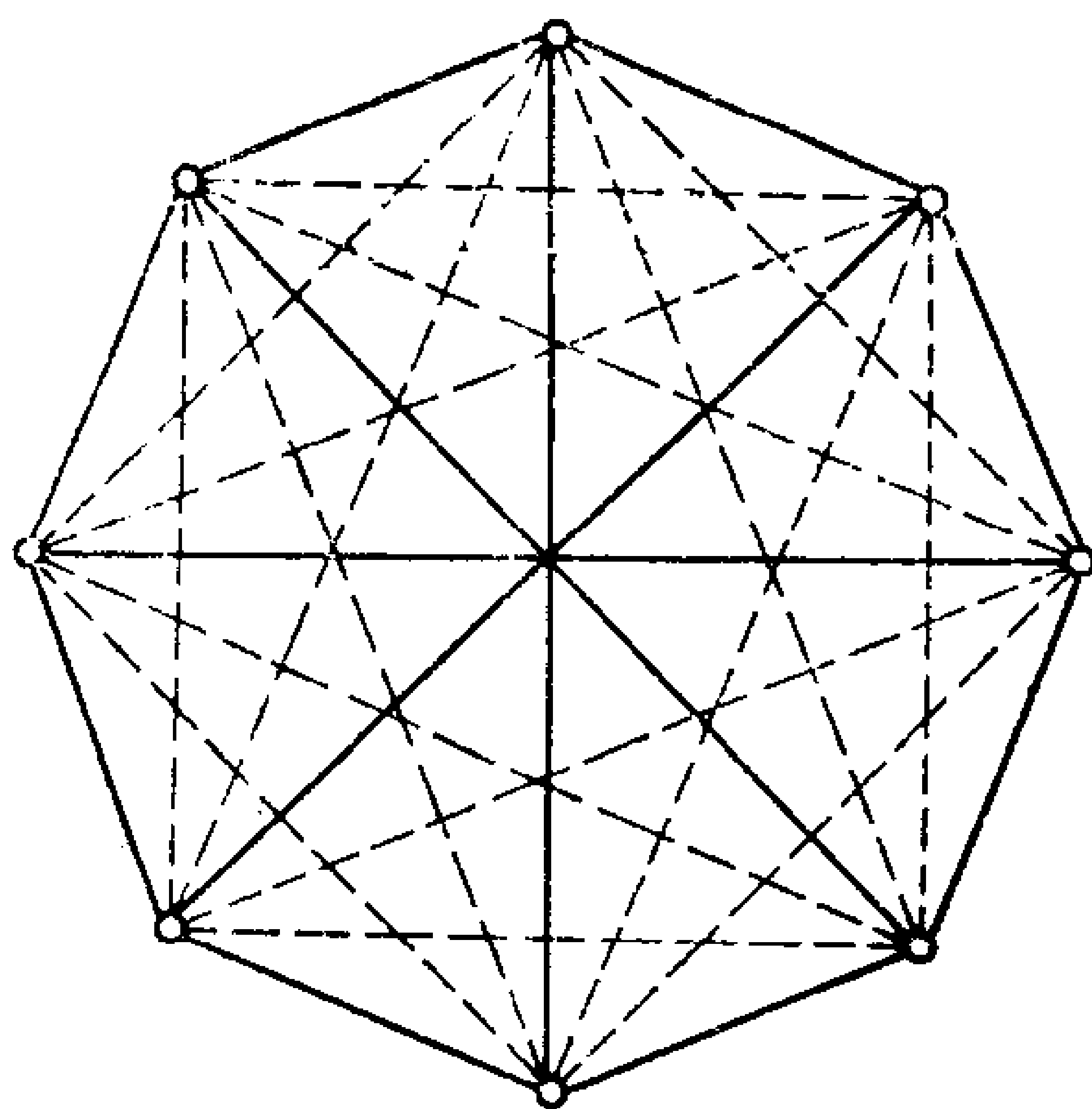


图 6

$$N(3, 4)=N(4, 3)\leqslant N(3, 3)+N(4, 2)-1$$
$$=6+4-1=9 \tag{7}$$

但当人数只有 8 个时，我们有图 6

这个图中既无纯实线三角形，又无纯虚线四边形，因而

$$N(3, 4)=N(4, 3)>8 \tag{8}$$

由(7)和(8)式，即可得

$$N(3, 4)=N(4, 3)=9$$

因而(6) 式成立。由(5) 和(6) 式，本定理得证。

定理 9：我们有

$$N(3, 5)=N(5, 3)=14$$

证明：由(1)、(3)和(6)式，我们有

$$N(3, 5)=N(5, 3)\leqslant N(4, 3)+N(5, 2)$$
$$=9+5=14 \tag{9}$$

但当人数只有13个时，我们有下面的图 7

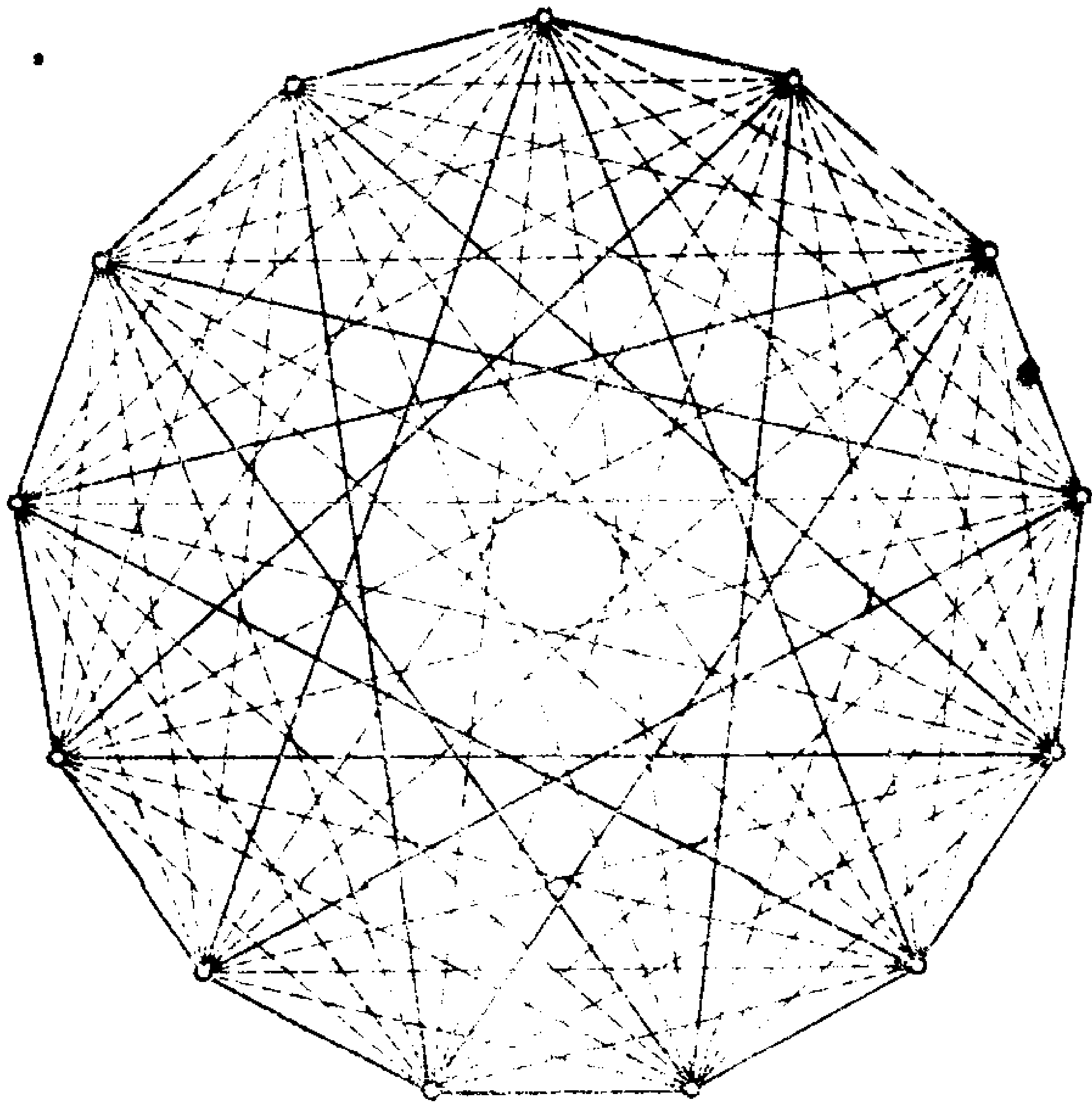


图 7

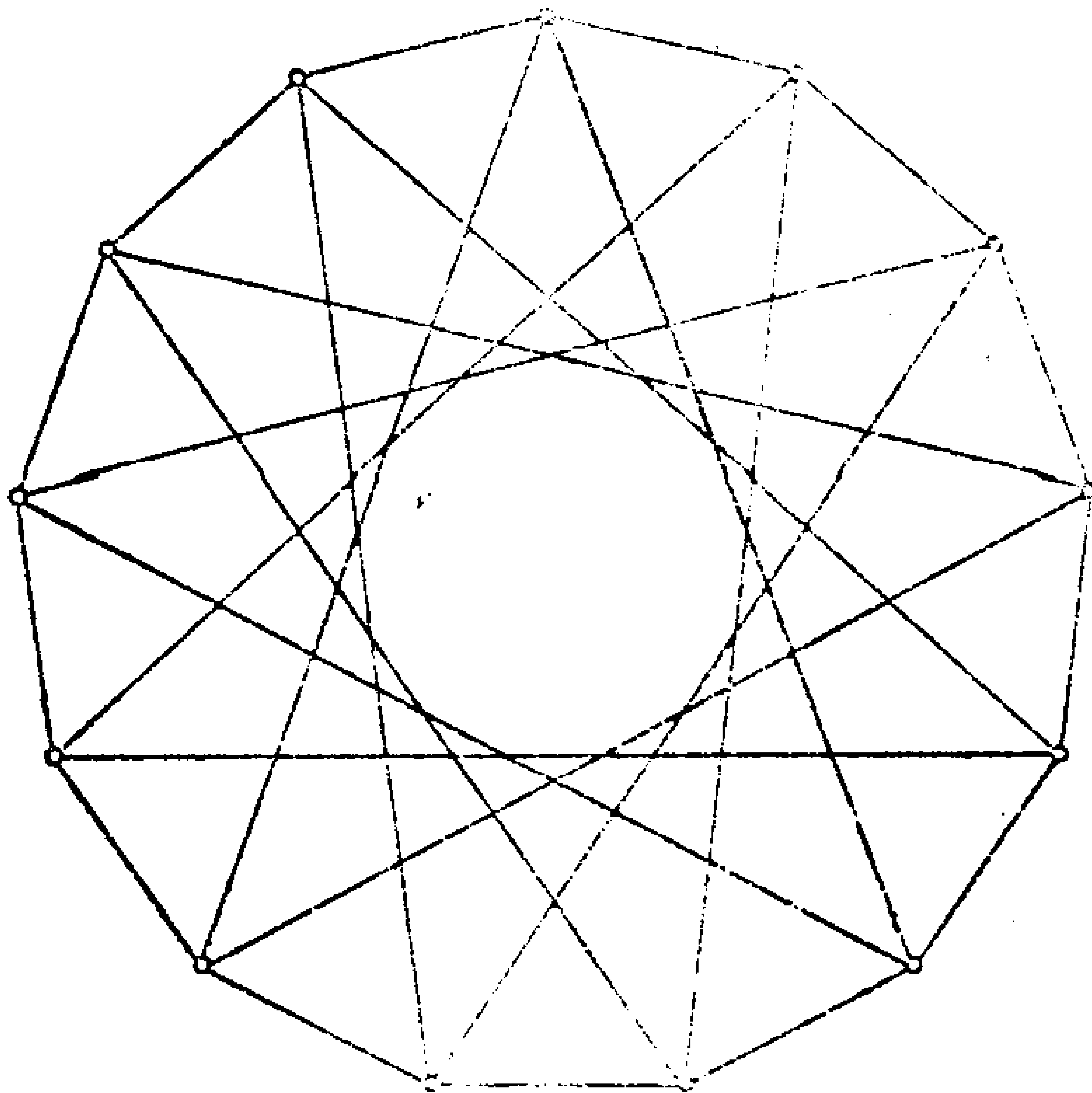


图 8

图 7 中的线条很多，我们把图 7 分解为仅有实线边的图 8 和仅有虚线边的图 9：

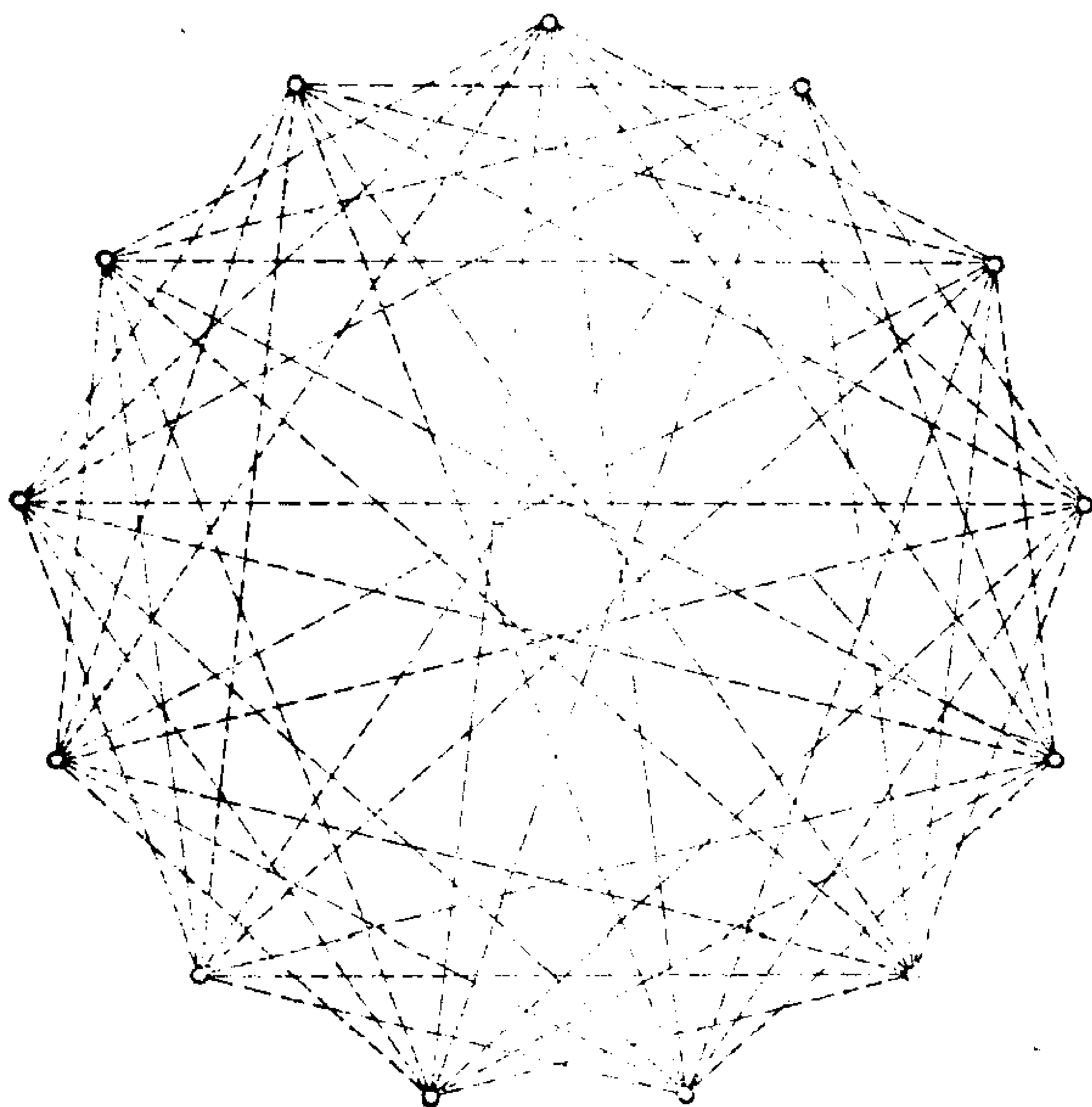


图 9

在图 8 中，没有纯实线三角形，而在图 9 中，也没有纯虚线五边形（包括对角线在内）。因而图 7 中既无纯实线三角形，又无纯虚线五边形（包括对角线在内）。故我们有

$$N(3,\ 5)=N(5,\ 3)>13 \tag{10}$$

由(9)和(10)式，我们立即可得

$$N(3,\ 5)=N(5,\ 3)=14$$

所以本定理得证。

又有人证明了：在十七个人中，可能不存在有四个人互

相都认识（或者四个人都互相不认识），即是

$$N(4,\ 4)\geqslant 17 \tag{11}$$

但由(3)式，我们有

$$N(4,\ 4)\leqslant N(3,\ 4)+N(4,\ 3)=9+9=18 \tag{12}$$

由(11)和(12)式，我们可以得到

$$N(4,\ 4)=18 \tag{13}$$

此外，我们现在知道的还有$N(3,\ 6)=N(6,\ 3)=18$，$N(3,\ 7)=N(7,\ 3)=23$。但是，当$k\geqslant 8$时，$N(3,\ k)$的确切数字我们尚未知道；当$k\geqslant 5$时，$N(4,\ k)$的确切数字也尚未知道；当$k\geqslant 4$时，$N(5,\ k)$的确切数字我们也不知道。

§4．置换(Permutationy)

让我们考虑把 1 到 n 中的数，置换到 a_1，a_2，…，a_n。我们可以认为这不仅仅是一个静态，而是一个重新安排物体的过程，在这种意义下，则132不仅仅是一个排列，而是把位于最后的物体置于前两个物体之间的一个动作。为了描写这个动作，我们使用记号

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

它的意思可以解释为将 1 送到a_1的地方，将 2 送到a_2的地方，等等。我们还可以认为置换是一种替换，即将 1 放到a_1的地方，将 2 放到a_2的地方，等等。又例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

即表示将 1 放到 1 的地方，将 2 放到 3 的地方，将 3 放到 2 的地方。

当P_1和P_2都是置换时，则我们定义P_1P_2为首先施加置换P_1，然后再施加置换P_2的结果。例如当$n=4$时有二个置换为

$$P_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\text{和}P_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$$

则在P_1P_2中首先是P_1将 1 放到 2 的地方，然后是 P_2 将 2 送到 4 的地方，即有

$$P_1P_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&&&\end{pmatrix}$$

P_1将 2 放到 4 的地方，然后P_2将 4 放到 1 的地方，即有

$$P_1P_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&&\end{pmatrix}$$

P_1将 3 放到 1 的地方，然后是P_2将 1 放到 3 的地方，即有

$$P_1P_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&\end{pmatrix}$$

P_1将 4 放到 3 的地方，然后是P_2将 3 放到 2 的地方，故P_1P_2将 4 放到 2 的地方，即有

$$P_1P_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$$

如上所定义的二个置换之乘积，还是一个置换，我们还可以证明置换对于乘法来说，是满足结合律的，即有

$a(bc)=(ab)c$。

有一个恒等(identity)置换，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I$$

它使得对于任意置换P都有$IP=P$，及$PI=P$成立。对于每一个置换P一定有一个逆置换P^{-1}，它使得$P(P^{-1})=I$，和$(P^{-1})P=I$成立，逆置换的构成是容易的，即如果P_1送1到2则P^{-1}送2到1，等等．例如

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

在数学中我们常遇到元素的集合G，而对于集合G中的元素，我们有办法定义其乘积并使得它们具有下面四个性质：

1.G中的二个元素相乘还是G中的一个元素。

2.当a，b，c都属于G时则有

$$a(bc)=(ab)c$$

3.在G中有一个恒等元素，它使得对于G中的任一个元素都具有

$$Ix=x \text{和} xI=x$$

4.对于G中的每一个元素，相应地在G中都有一个逆元素x^{-1}，它使得

$$x(x^{-1})=I \text{和} (x^{-1})x=I$$

这样的一个集合G，我们称之为群，为了避免混乱，我们使用记号＊来表示群G中的乘积。

例 5：正整数的商（也叫做正有理数或正分数）构成一个群，其中的恒等元素是1而$\frac{a}{b}$的逆元素是$\frac{b}{a}$。

例 6：设$G=\{1, 3, 7, 9\}$，故集合G中共有四个元素，即1，3，7，9。当x和y都属于集合G时，则我们定义$x*y$等于xy中的个位数的数字，则集合G是一个群。例如 3 乘 7 等于21而21的个位数是 1，所以在G中$3*7=1$；由于 7 乘 9 等于63，所以在G中有$7*9=3$。对于这个群的乘法表示是

*	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

例 7：全体整数的集合G对于G中的二个元素x和y，则我们定义$x*y=x+y$（其中“+”系表示通常所用的加法），则有

（1）$x*y$显然还是一个正整数。

（2）我们有$x*(y*z)=(x*y)*z$。

（3）整数 0 是一个恒等元素，即有

$$0*x=x*0=x$$

（4）对于G中的每一个元素x都有它的逆元素$(-x)$，具有

$$a*(-a)=0=(-a)*a$$

定理10：数1，2，…，n的全体置换构成一个群。

这个群我们使用记号S_n来表示并称之为n阶对称群，它恰巧有$n!$个元素。

例 8：S_3的6个元素是

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}。$$

置换的乘积不象数列的乘积一样，它不总是可以交换的，也就是说，a和b的乘积不总会是等于b和a的乘积。

例 9：我们有

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

但是

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

这只表示S_3不是可交换的，但是这种想法可以对于更大阶的对称群还是对的，例如对于S_5，我们有

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}\text{但是}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&4&5\end{pmatrix}。$$

另外方面，对于S_1来说只有一个置换即$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$而对于$S_2$来说只有两个置换即

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

故S_1和S_2都是交换群。

使用二排的符号来描写置换有两个不方便之处，首先，它是麻烦和含有很多多余的记号（（1，2，…，n的重复）；其次，这个符号将每个置换的根本结构隐藏，为了修改这些，我们就引进了另外一种置换的记号，称之为轮换，一个轮换是在圆括弧内的一列数，使用逗号或间隔来分离。例如$(a_1, a_2, \cdots, a_m)$表示明确重新排列，即“将a_1放到a_2的地方，将a_2放到a_3的地方，…，将a_{m-1}放到a_m的地方，将a_m放到a_1的地方”，一个轮换的长度就是含在该轮换的项的数目。

例10：$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$的轮换是$(1, 3, 2, 4)$，它的长度是4。

例11：$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$的轮换是$(1, 2, 3)$，其中4停留固定。

例12：$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&6&1&3&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&2&1&3&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&3&4&2&5\end{pmatrix}$

$=(1, 4, 3)(2, 6, 5)$

例13：$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&4&3&6&1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&2&3&4&1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&4&3&6&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$

$=(1, 5)(2, 4, 6)(3)$。

例14：对于S_2中的两个元素使用轮换表示时则有

$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=(1)(2)=I$，$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=(1, 2)$。

例15： 对于S_3中的六个元素使用轮换来表示时则有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = I,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2,\ 3) = (2,\ 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,\ 2)(3) = (1,\ 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,\ 2,\ 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,\ 3,\ 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,\ 3)(2) = (1,\ 3)$$

关于S_3中的元素的乘积表是

*	I	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)
I	I	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)
(1, 2)	(1, 2)	I	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	(1, 3)	(2, 3)
(1, 3)	(1, 3)	(1, 3, 2)	I	(1, 2, 3)	(2, 3)	(1, 2)
(2, 3)	(2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	I	(1, 2)	(1, 3)
(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(2, 3)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 3, 2)	I
(1, 3, 2)	(1, 3, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(1, 2)	I	(1, 2, 3)

如果G是一个群而S是G中的一个子集合而且S也是一个群时，则我们说S是G的一个子群。例如S_1是S_2的一个子群，S_2是S_3的一个子群，等等。

两个轮换称做分离的（disjoint），如果在这两个轮换中没有共同的元素。

定理11：当a和b是两个分离的轮换时，则我们有

$$ab=ba$$

证明：当a和b是两个置换，而这两个置换用到重新安排的是分离集合时是和它们的重新安排的次序无关，因而本定理成立。

习题

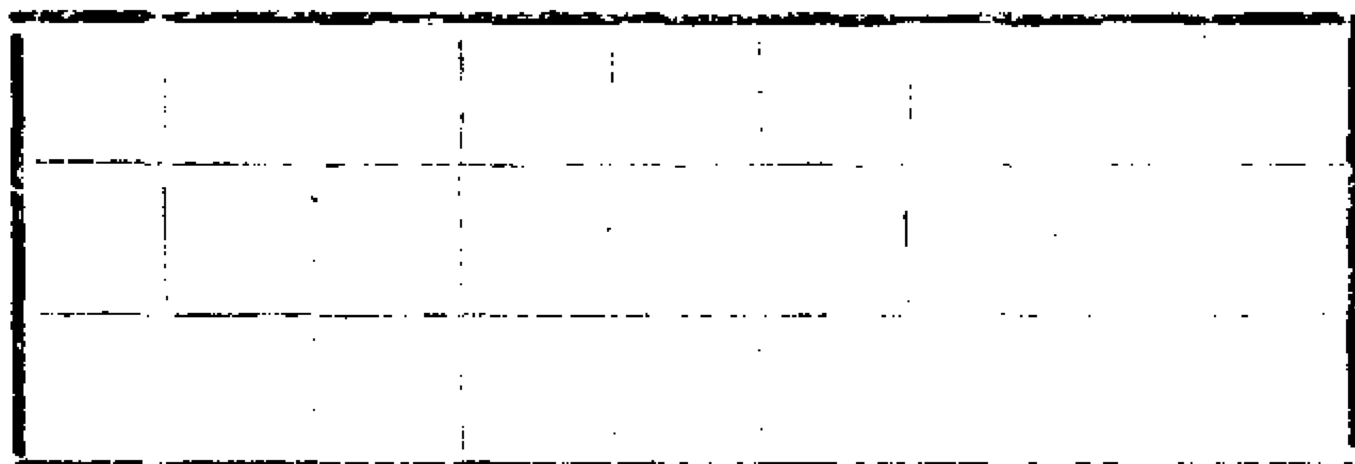
1.设有$a_1+a_2+\cdots+a_n-n+1$个元素，其中n和$a_i(i=1, 2, \cdots, n)$都是正整数，若将这$a_1+a_2+\cdots+a_n-n+1$个元素分成为n个集合,则至少应存在一个正整数m(其中$1\leqslant m\leqslant n$)，它使得在第m个集合里至少包含有a_m个元素。

2.设，$m\geqslant 1$，又设$a_1, a_2, \cdots, a_{2m+1}$是$1, 2, \cdots, 2m+1$的一个更列，则2能够整除$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_{2m+1}-(2m+1))$。

3.10个不同的十进制两位数，组成一个集合A，试证明必定存在A的两个不相交的非空子集合B和E，使B中一切元素之和等于E中一切元素之和。

4.在边长为1的正方形内任意放置5个点，则其中至少

有两点，它们的距离$\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$。



5.如图：三行9列的27个小方格，每个小方格都涂上红色或者蓝色，则一定有两列的涂色方式相同。

6.任给五个整数，则必能从中选出三个，使得它们之和能够被3整除。

7.设正奇数$n\geqslant3$，而$a_1, a_2, \cdots, a_{n^2-2n+2}$是$n^2-2n+2$个整数，则必能从中选出$n$个数，使得它们的和能够被$n$整除。

8.设n和$a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$都是正整数，则我们总可以找到一对数$a_i$与$a_j$；（其中$1\leqslant i<j\leqslant n+1$）使得它们的差能够被$n$整除。

9.设正整数$n\geqslant2$，又设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是n个正整数，则我们总可以找到一对数a_i与a_j，（其中$1\leqslant i<j\leqslant n$），使得它们的差或者它们的和能够被$n$整除。

10. 设正整数$a\geqslant2$，$b\geqslant2$，则我们有

$$N(a, b)\leqslant\binom{a+b-2}{a-1}$$

11. 设w是任一给定实数，n是任意正整数，则存在整数x，y使得

$$|y-wx|<\frac{1}{n}, \quad 0<x\leqslant n$$

12. 令

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&3&5&2&4&1&7\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&7&2&1&3&4&5\end{pmatrix}$$

请求出ab与ba，它们是否相等？

13. 设P_1是长度为 2 的一个轮换，请证明$P_1^2=I$。设P_2是长度为 3 的一个轮换，请证明$P_2^3=I$。设$k\geqslant 4$而P_{k-1}是长度为 k 的一个轮换，请证明$P_{k-1}^k=I$。

14. 设$P=(1, 2)(3, 4, 5, 6)$，请证明$P^4=I$。

第四章

容斥原理

§1. 集合的基本知识

为了介绍容斥原理，我们必须首先介绍一些关于集合的基本知识。

集合：我们把所研究的对象叫做元素，把那些确定的，能够区分的元素的总体叫做集合，并说这个集合是由这些元素所组成。例如，北京大学的全体学生组成一个集合。如果不特别声明集合中的某些元素是相同的，则可以认为所有元素都是相异的。我们常用大写拉丁字母来表示集合，而用小写拉丁字母表示元素。

若元素 a 在集合 A 中，那么我们就说集合 A 中含有元素 a，并记为 $a\in A$ 或 $A\ni a$

若元素 a 不在集合 A 中，那么我们就说集合 A 中不含有元素 a，记为 $a \notin A$ 或 $A \not\ni a$

若任给两个集合 A 和集合 B，当且仅当对于每一个元素 a；若 $a \in A$，则 $a \in B$；并且，对于每一个元素 a；若 $a \in B$，则 $a \in A$。那么我们就说集合 A 和集合 B 相等，记为 $A = B$。例如，集合 $A = \{1, 2, 3\}$，集合 $B = \{3, 1, 2\}$。由于这两个集合元素完全相同，虽然元素的顺序不同，我们还是说 $A = B$。若集合 $C = \{1, 3, 5\}$，而集合 $D = \{2, 3, 4\}$。这两个集合只有一个相同的元素 3，但是其他的元素就不同了，因此 $C \neq D$。

若集合 A 的每一个元素也都是集合 B 的元素，那么我们就说集合 A 是集合 B 的一个子集合，记为 $A \subset B$。若集合 A 不是集合 B 的子集合，就记为 $A \not\subset B$。若 $A \subset B$ 时，我们也说 A 包含在 B 中，有时也说集合 B 包含集合 A。

对于任给的集合 A，B，C，我们有

(i) $A \subset A$，

(ii) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset C$，则 $A \subset C$。

对集合之间的运算来说，最基本的运算有“并”和“交”。

若三个集合 A，B，C 之间满足：A 中的任一个元素 x 都包含在 B 中或者包含在集合 C 中；又集合 B 或者集合 C 中的元素也都包含在集合 A 中。则称集合 A 为集合 B 与集合 C 的并集合，记为

$$A = B \cup C$$

若三个集合 A，B、C 之间满足：集合 A 中的任一元素

x，一定包含在集合B中，也一定包含在集合C中；又集合B和集合C都共同含有的元素也一定在集合A中。则称集合A是集合B与集合C的交集合，记为

$$A=B\cap C$$

§2. 关于容斥原理

在计算一个集合的元素的个数时，我们经常发现间接计算比直接计算更为简单，例如，我们想计算1到600之间不能被6整除的整数的个数时，可采用下述方法：首先计算1到600之间能被6整除的整数的个数，因为每6个连续整数内，一定有且只有一个整数能被6整除，所以1到600之间能被6整除的整数的个数为$600\div6=100$，而在1到600之间不能被6整除的整数的个数就是$600-100=500$。这个例子中所用到的间接计算原理可叙述如下：如果集合A是集合S的一个子集合，则属于A的元素的个数，等于S的所有元素的个数减去属于S而不属于A的元素的个数。若我们用记号$\bar{A}$来表示属于S而不属于A的元素的集合，并用记号$|A|$来表示A的元素的个数，那么上述原理还可以写为

$$|A|=|S|-|\bar{A}|$$

或者是

$$|\bar{A}|=|S|-|A|$$

下面我们来讨论上述原理的重要推广，并称之为“容斥原理”，还要举几个例子来说明这个原理的运用。

设S是一个有限元素的集合，又设P_1，P_2是两个不同的性质。S中的每一个元素可能具有性质P_1和性质P_2，可能只具有两个性质之一，也可能这两个性质都不具有。我们想求出S中的既不具有性质P_1又不具有性质P_2的元素的个数。首先在集合S的所有元素中，去掉具有性质P_1的元素，再去掉具有性质P_2的元素。请注意，这样计算时，我们把那些既具有性质P_1又具有性质P_2的元素减掉了两次，可以还得加上一次既具有性质P_1又具有性质P_2的元素。若令A_1是S中的具有性质P_1的所有元素的子集合，而令A_2是S中的具有性质P_2的所有元素的子集合，又令$\bar{A}_1$是S中的不具有性质P_1的所有元素的子集合，$\bar{A}_2$是S中的不具有性质P_2的所有元素的子集合，则$\bar{A}_1\cap\bar{A}_2$（这即是$\bar{A}_1$与$\bar{A}_2$的交集合）就是S中的既不具有性质P_1又不具有性质P_2的元素的子集合。于是我们有下列公式

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1\cap A_2| \qquad (1)$$

更一般，假设P_1，P_2，…，P_m是m个性质。S中的元素可能具有这些性质的一部分或全部，也可能不具有这些性质中的任何一个性质。令$A_i(i=1, 2, \cdots, m)$是S中的子集合，它的元素具有性质P_i（也可能同时具有其他性质）；那么$A_i\cap A_j$是S中的同时具有性质P_i和性质P_j的元素的子集合；$A_i\cap A_j\cap A_k$是S中的同时具有性质P_i，P_j和P_k的元素的子集合；…。而在S中的不具有性质P_1，P_2，…，P_m中的任何一个性质的元素的子集合是$\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\cdots\cap\bar{A}_m$。

定理 1：我们有

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\cdots\cap\bar{A}_m|$$
$$=|S|-\sum|A_i|+\sum|A_i\cap A_j|-\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|$$
$$+\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_m| \qquad (2)$$

成立。其中第一个和式取遍包含于区间［1，m］的所有整数集合；第二个和式取遍集合$\{(i,\ j);\ i\neq j$，且$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$；第三个和式取遍集合$\{(i,\ j,\ k);\ i\neq j\neq k\neq i$，且$i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$；…。

说明： 当$m=3$时，(2)式为

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|$$
$$=|S|-\sum_{i=1}^{3}|A_i|+\sum_{i\neq j,i,j=1}^{3}|A_i\cap A_j|$$
$$+(-1)^3|A_1\cap A_2\cap A_3|$$
$$=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1\cap A_2|$$
$$+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)-|A_1\cap A_2\cap A_3| \qquad (3)$$

因为$1+3+3+1=8$，所以(3)式右边共有 8 项。

当$m=4$时，(2)式为

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4|$$
$$=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|)+(|A_1\cap A_2|$$
$$+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_4|$$
$$+|A_3\cap A_4|)-(|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|$$
$$+|A_1\cap A_3\cap A_4|+|A_2\cap A_3\cap A_4|)$$
$$+|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| \qquad (4)$$

因为$1+4+6+4+1=16$，所以(4)式右边有16项。

在一般情况下，(2)式右边的项数是

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\cdots+\binom{m}{m-1}+\binom{m}{m}=(1+1)^m=2^m$$

在证明定理之前，我们先举一个例子来看一下定理的应用。

例 1：某高中一个班共有60名学生，其中：24个学生喜爱数学，28个学生喜爱物理，26个学生喜爱化学，10个学生既喜爱数学又喜爱物理，8个学生既喜爱数学又喜爱化学，14个学生既喜爱物理又喜爱化学，6个学生对这三门学科都喜爱，问有多少个学生对这三门学科都不喜爱？

解：设这个班的60个学生所组成的集合为S，而其中喜爱数学的学生所组成的集合为A_1，喜欢物理的学生所组成的集合为A_2，喜欢化学的学生所组成的集合为A_3，那么既喜欢数学又喜欢物理的学生所组成的集合为$A_1\cap A_2$，既喜欢数学又喜欢化学的学生所组成的集合为$A_1\cap A_3$，既喜欢物理又喜欢化学的学生所组成的集合为$A_2\cap A_3$，三门学科都欢喜的学生所组成的集合为$A_1\cap A_2\cap A_3$，而三门学科都不喜欢的学生所组成的集合为$\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3$。由(3)式，我们有

$$\begin{aligned}&|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3|\\&=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1\cap A_2|\\&\quad+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)-|A_1\cap A_2\cap A_3|\\&=60-(24+28+26)+(10+8+14)-6\\&=8\end{aligned}$$

所以有8个学生对这三门学科都不喜爱。

现在我们再来证明定理1。

证明：(2)式左边是S中的不具有性质P_1，P_2，…，P_m中任何一个性质的元素的个数。因此，我们要证明(2)式成立，只需去证明一个不具有性质P_1、P_2，…，P_m中任何一个性质的元素，对(2)式右边的贡献是1；而至少含有这m个性质中的一个性质的元素对(2)式右边的贡献则是0。

首先考虑S中的一个不具有这m个性质中任何一个性质的元素x，它在S中，但不在$A_i(i=1, 2, \cdots, m)$中，所以它对(2)式右边贡献的数值是$1-0+0-0+\cdots+(-1)^m\cdot 0=1$

其次考虑S中的元素y，它恰好具有这m个性质中的n $(1\leqslant n\leqslant m)$个性质。它在$S$中，所以对$|S|$的贡献为$1=\binom{n}{0}$；它恰好具有$n$个性质，所以它是集合$A_1$，$A_2$，…，$A_m$中的$n$个集合的元素，因而它对$\sum|A_i|$的贡献是$n=\binom{n}{1}$；又因为在$n$个性质中取出一对性质的方法有$\binom{n}{2}$个，故$y$是$\binom{n}{2}$个集合$A_i\cap A_j$中的一个元素，所以它对$\sum|A_i\cap A_j|$的贡献是$\binom{n}{2}$；同样，它对$\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|$的贡献是$\binom{n}{3}$；…。因而$y$对(2)式右边所作出的贡献是

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^m\binom{n}{m} \tag{5}$$

其中$n\leqslant m$，由于当$n<k$时有$\binom{n}{k}=0$，故(5)式的数值也就是

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$$
$$=(1-1)^n=0$$

所以 y 若具有性质P_1，P_2，…，P_m 中的至少一个性质时，它对(2)式右边的贡献都只能是 0 。因而本定理得证。

推论：在集合 S 中的至少具有性质 P_1，P_2，…，P_m 中的一个性质的元素的个数是

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_m| \\
=&\sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&+ \cdots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_m| \qquad (6)
\end{aligned}
$$

其中和式的取法与(2)式中和式的取法一样。

证明：集合$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_m$是 S 中的至少具有性质P_1，P_2，…，P_m中的一个性质之元素所组成的子集合，所以有

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_m| \\
=& |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_m}|
\end{aligned}
$$

但由集合论的一个常用公式，我们有

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_m} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \cdots \cap \bar{A}_m$$

故我们有

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_m| \\
=& |S| - |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| \qquad (7)
\end{aligned}
$$

将(2)式代入(7)式，即可知道 (6) 式成立。因而本推论得证。

§3. 容斥原理的应用

例 2：请求出 1 到1000中不能被 5 整除，也不能被 6 或

8 整除的整数的个数。

解：为了解决这个问题，我们引进一些记号。对一个实数 r，我们令$[r]$表示一个不超过 r 的最大整数，同时，我们把整数a，b的最小公倍数记为$L_{cm}\{a, b\}$，把三个整数 a,b，c的最小公倍数记为$L_{cm}\{a, b, c\}$，我们用P_1来表示一个整数能被 5 整除的这个性质，又用P_2来表示一个整数能被 6 整除的这个性质，我们再用P_3来表示一个整数能被 8 整除的这个性质；令 S 是从 1 到1000中的所有整数组成的集合，又令A_i（其中$i=1, 2, 3$）是 S 中的具有性质P_i的整数所组成的子集合。我们想找出的就是 $\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3$ 中的整数的个数。首先，我们有

$$|A_1|=\left[\frac{1000}{5}\right]=200$$

$$|A_2|=\left[\frac{1000}{6}\right]=166$$

$$|A_3|=\left[\frac{1000}{8}\right]=125$$

在集合$A_1\cap A_2$中的整数是同时能被 5 和 6 整除的，但是一个整数能同时被 5 和 6 整除的充要条件是这个整数能被 5 和 6 的最小公倍数整除，而 5 和 6 的最小公倍数是30，所以集合$A_1\cap A_2$中的整数一定能被30整除，故我们有

$$|A_1\cap A_2|=\left[\frac{1000}{30}\right]=33$$

同样道理，因为 5 和 8 的最小公倍数是40，6 和 8 的最小公

倍数是24，所以我们有

$$|A_1 \cap A_3| = \left[\frac{1000}{40}\right] = 25$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left[\frac{1000}{24}\right] = 41,$$

又因为5,6,8的最小公倍数是120，用相似的办法，可以得到

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{1000}{120}\right] = 8$$

所以，由定理1，我们知道，1到1000中的既不能被5整除又不能被6或8整除的整数的个数为

$$\begin{aligned}
&|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| \\
&= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| \\
&\quad + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 \\
&= 600
\end{aligned}$$

故本例题得解。

例3：如果两个整数的最大公因子是1，则称它们是互素的。例如，12与49是互素的，但是39与111不是互素的，这是因为它们都能被3整除。我们把小于n而又和n互素的正整数的个数称为欧拉函数$\Phi(n)$。例如，小于30而与30互素的正整数有1，7，11，13，17，19，23，29。（小于30的其他正整数与30都有大于1的公因子）所以得到$\Phi(30)=8$

若n的不同素数因子是$P_1, P_2, \cdots, P_m$，用$A_i(i=1,2,\cdots,m)$来表示从1到n的能被P_i整除的所有整数组成的集

合。现在我们要来计算$\Phi(n)$，这个$\Phi(n)$也就是集合$\{1, 2, \cdots, n\}$中的不属于任一个$A_i(i=1, 2, \cdots, m)$的整数的个数，由(2)式，我们有

$$\Phi(n)=n-\sum|A_i|+\sum|A_i\cap A_j|-\sum|A_i\cap A_j\cap A_k| +\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_m| \quad (8)$$

从 1 到 n 之间能同时被素数 P_i，P_j，P_k 整除的整数的个数为 $\frac{n}{P_iP_jP_k}$，而这些整数恰好是 $P_iP_jP_k$，$2P_iP_jP_k$，$3P_iP_jP_k$，$\cdots$，$\left(\frac{n}{P_iP_jP_k}\right)P_iP_jP_k$，所以由(8)式我们有

$$\Phi(n)=n-\left(\frac{n}{P_1}+\frac{n}{P_2}+\cdots+\frac{n}{P_m}\right)+\left(\frac{n}{P_1P_2}+\frac{n}{P_1P_3}+\cdots+\frac{n}{P_{m-1}P_m}\right)-\cdots+(-1)^m\frac{n}{P_1P_2\cdots P_m}$$

$$=n\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{P_m}\right)$$

请注意：在$\Phi(n)$中，不管 n 的素数因子P_i的次数是多少次方（但次数$\geqslant 1$）时，结论中的$\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{P_m}\right)$都是一样。例如求$\Phi(30)$和$\Phi(60)$，则因为$30=2\times3\times5$，$60=2^2\times3\times5$所以我们有

$$\Phi(30)=30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=8$$

$$\Phi(60)=60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=16。$$

如果集合$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$的无重复排列$a_1, a_2, \cdots, a_n$满足条件$a_i \neq i (i=1, 2, \cdots, n)$，则称$i$为排列1，2，3，…，$n$的一个更列。我们使用$D_n$来表示集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的更列的个数，则我们有：当$n=1$时，根本不存在有更列，故$D_1=0$。当$n=2$时，则只有一个更列，即为2，1，故$D_2=1$。当$n=3$时，更列有：2，3，1；3，1，2。故$D_3=2$。当$n=4$时，更列有：2，1，4，3；2，3，4，1；2，4，1，3；3，1，4，2；3，4，1，2；3，4，2，1；4，1，2，3；4，3，1，2；4，3，2，1。故有$D_4=9$。

定理2：当$n \geqslant 1$时，我们有

$$D_n=\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)(n!) \tag{9}$$

证明：令S是$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$的无重复的排列的集合，则集合S中的元素个数为$n!$。当$j=1, 2, 3, \cdots, n$时，我们令P_j是一个排列，它使得j的位置不变，因而具有性质P_j的排列$i_1, i_2, \cdots, i_n$应是集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的一个无重复的排列，且具有$i_j=j$。令$A_j (j=1, 2, \cdots, n)$是S中的具有性质P_j的排列所组成的子集合。又1，2，…，n的一个更列就是一个排列，并且不具有性质$P_1, P_2, \cdots, P_n$中任一个性质，所以得到$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有更列组成的集合应该是$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \cdots \cap \bar{A}_n$，从而得到$D_n=|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \cdots \cap \bar{A}_n|$。现在我们将利用定理1来计算$D_n$的数值。

由于集合A_1中所有的排列应具有形式1，i_2，i_3，…i_n，其中i_2，i_3，…i_n是集合$\{2, 3, \cdots, n\}$的一个无重复的排列。因而$|A_1|=(n-1)!$；同样，对于任何的j，当$1\leqslant j\leqslant n$时，我们都有

$$|A_j|=(n-1)!$$

在集合$A_1\cap A_2$中的排列应具有形式1，2，i_3，i_4，…，i_n，其中i_3，i_4，…，i_n是$\{3, 4, \cdots, n\}$的一个无重复的排列，因而$|A_1\cap A_2|=(n-2)!$。同理，当$1\leqslant i<j\leqslant n$时，我们都有

$$|A_i\cap A_j|=(n-2)!$$

对于任一个整数k，当它满足条件$1\leqslant k\leqslant n$时，在$A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_k$中的排列应具有形式1，2，…，$k$，$i_{k+1}$，$i_{k+2}$，…，$i_n$，其中$i_{k+1}$，$i_{k+2}$，…，$i_n$是集合$\{k+1, k+2, \cdots, n\}$的一个无重复的排列，因而$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|=(n-k)!$。同理，一般来说，对于集合$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$的一个$k$—组合$i_1$，$i_2$，…，$i_k$应有如下式子。

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=(n-k)!$$

由于集合$\{1, 2, 3, \cdots, n)$的k—组合的组数是$\binom{n}{k}$，故由定理1，我们有

$$D_n=n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\binom{n}{3}(n-3)!$$

$$+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}0!$$

$$=n!-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{n!}{n!}$$

$$=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

因而本定理得证。

由定理 2，经过计算我们有

$$D_5=5!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)$$

$$=5!\left(\frac{3-1}{3!}+\frac{5-1}{5!}\right)$$

$$=5\times4\times2+4=44$$

$$D_6=6!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\right)$$

$$=6!\left(\frac{3-1}{3!}+\frac{5-1}{5!}+\frac{1}{6!}\right)$$

$$=6\times5\times4\times2+6\times4+1$$

$$=240+24+1$$

$$=265$$

$$D_7=7!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\right)$$

$$=7!\left(\frac{3-1}{3!}+\frac{5-1}{5!}+\frac{7-1}{7!}\right)$$

$$=7\times6\times5\times4\times2+7\times6\times4+6$$

$$=1680+168+6$$

$$=1854$$

$$D_8=8!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\right)$$

$$=8!\left(\frac{3-1}{3!}+\frac{5-1}{5!}+\frac{7-1}{7!}+\frac{1}{8!}\right)$$

$$=8\times7\times6\times5\times4\times2+8\times7\times6\times4+8\times6+1$$

$$=13440+1344+48+1$$

$$=14833$$

我们知道

$$e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots$$

由定理 2 我们有

$$\frac{D_n}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots-(-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$=e^{-1}-(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}-(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+2)!}-\cdots$$

因而我们得到

$$\left|\frac{D_n}{n!}-e^{-1}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}$$

由上面的计算我们知道

$$\left|\frac{D_7}{7!}-e^{-1}\right|\leqslant\frac{1}{8!}=\frac{1}{40320}$$

所以说，当 n 很大时，$\frac{D_n}{n!}$ 很接近 e^{-1}。

§4. 更列

假如有 n 个孩子。每天这 n 个孩子都要排成一列队出去散步，其中除了排在最前面的那一个孩子以外，其余的孩子一定是一个跟着一个排成一个列队。孩子们不愿意每天排在自己前面的总是同一个人，他们希望每天都要改变一下排在自己前面的那个人。有多少种办法能够按照孩子们的愿望来改变排列的位置呢？我们把这个问题抽象成为一个数学问题，也就是说，给定一个正整数 n，令 Q_n 表示$\{1, 2, \cdots, n\}$ 中的这样一类排列所组成的集合的元素个数，即这一类排列中不允许出现12，23，…，$(n-1)n$ 的这种情况，也就是：当对任意的 j 满足 $1 \leqslant j \leqslant n-1$ 这个条件的时候，排列中处处都不允许出现有 $j(j+1)$ 的这种情况。现在我们来计算 Q_n 的数值。

当 $n=1$ 时，我们定义为

$$Q_1 = 1$$

当 $n=2$ 时，只有21这样一个排列满足所要求的条件，故我们有

$$Q_2 = 1$$

当 $n=3$ 时，满足所要求条件的排列有：132，213，321，所以我们有

$$Q_3 = 3$$

当 $n=4$ 时，满足所要求条件的排列有：1324，1432，

2143, 2413, 2431, 3142, 3214, 3241, 41[illegible] 4213.4321,
所以有

$$Q_4=11$$

一般地，我们有下面的定理：

定理3：当 n 为一个正整数时，则我们有

$$Q_n=n!-\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-1}{2}(n-2)!$$
$$-\binom{n-1}{3}(n-3)!+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

证明：我们使用 S 来表示由$\{1,\ 2,\ \cdots,n\}$中的所有$n!$个排列所构成的集合，显然有 $|S|=n!$。又令P_j（其中 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$）来表示在排列中具有$j(j+1)$的形式这一种性质，因而当且仅当$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$中的一个排列同时不具有$P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{n-1}$这$n-1$个性质中任何一个性质时，这个排列就被当作为1而算在Q_n中，即是说它对Q_n的贡献为1。否则，它对Q_n的贡献就是0。若我们再令A_j（其中 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$）为$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$中具有性质P_j（也可能同时还具有其他性质）的排列所构成的集合，则我们有

$$Q_n=|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_{n-1}| \tag{10}$$

我们首先来计算在A_1中排列的个数。我们知道，当且仅当 S 中的一个排列出现有12的形式时，这个排列才属于A_1，因而A_1中的一个排列也可以被看为是$\{12,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n\}$这$n-1$个元素所构成的集合中的一个排列，所以我们有

$$|A_1|=(n-1)!$$

使用同样的方法，当 $j=2,3,\cdots,n-1$ 时，我们都有

$$|A_j|=(n-1)!$$

现在我们再来计算$A_1\cap A_2$中排列的个数。当且仅当一个排列中同时出现12和23这两种情况时，这个排列才能算是$A_1\cap A_2$中的一个元素，因而也可以把$A_1\cap A_2$中的一个排列看为是{123，4，5，…，n}中的一个排列。由于{123，4,5，…，n}是由$n-2$个元素所组成的，所以我们有

$$|A_1\cap A_2|=(n-2)!$$

再来考虑$A_1\cap A_3$中的排列的个数。当且仅当一个排列中同时出现12和34这两种情况时，这个排列才能算是$A_1\cap A_3$中的一个元素，因而$A_1\cap A_3$中的一个排列也可以被看为是{12，34，5，6，…，n}中的一个排列，由于{12，34，5，6，…，n}中有$n-2$个元素，所以得到

$$|A_1\cap A_3|=(n-2)!$$

使用同样办法，可以知道$A_i\cap A_j$（其中：$i\neq j$，而$i,j=1,2,\cdots,n-1$）中排列的个数为

$$|A_i\cap A_j|=(n-2)!$$

更一般地，令$i_1,i_2,\cdots,i_m$（其中$1\leqslant m\leqslant n-1$）是{1，2，…，$n$}中的$m$个元素所构成的一个组合时，则我们有

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_m}|=(n-m)!$$

当$m=1,2,\cdots,n-1$时，我们知道，从{1，2，…，$n-1$}中取出m个元素来进行组合的方法有$\binom{n-1}{m}$种，因而使用容斥原理，我们有

$$
\begin{aligned}
Q_n &= |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n|\\
&= |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k|\\
&\quad + \cdots + (-1)^m \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}| + \cdots\\
&\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}|\\
&= n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)!\\
&\quad - \binom{n-1}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^m \binom{n-1}{m}(n-m)!\\
&\quad + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!
\end{aligned}
$$

所以本定理得证。

利用定理 3，经过计算，我们有

$$
\begin{aligned}
Q_5 &= 5! - \binom{4}{1}4! + \binom{4}{2}3! - \binom{4}{3}2! + \binom{4}{4}1!\\
&= 5! - 4\cdot 4! + 6\cdot 3! - 4\cdot 2! + 1\\
&= 53
\end{aligned}
$$

定理4：当$n \geqslant 2$时，则我们有

$$Q_n = D_n + D_{n-1}$$

证明：当$1 \leqslant m \leqslant n-1$时，由于

$$
\begin{aligned}
\binom{n-1}{m}(n-m)! &= \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!}(n-m)!\\
&= \frac{(n-1)!(n-m)}{m!}
\end{aligned}
$$

故由定理 3，我们有

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)!$$

$$-\binom{n-1}{3}(n-3)!+\cdots+(-1)^m\binom{n-1}{m}(n-m)!$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

$$=n!-\frac{(n-1)!(n-1)}{1!}+\frac{(n-1)!(n-2)}{2!}$$

$$-\frac{(n-1)!(n-3)}{3!}+\cdots+(-1)^m\frac{(n-1)!(n-m)}{m!}$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!(n-n+1)}{(n-1)!}$$

$$=(n-1)!\left[n-\frac{n-1}{1!}+\frac{n-2}{2!}-\frac{n-3}{3!}+\cdots+(-1)^m\frac{n-m}{m!}\right.$$

$$\left.+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right] \qquad (11)$$

又由于当$1\leqslant m\leqslant n-1$时，我们有

$$(-1)^m\frac{n-m}{m!}=(-1)^m\frac{n}{m!}+(-1)^{m-1}\frac{1}{(m-1)!} \qquad (12)$$

将(12)代入(11)式中，则我们有

$$Q_n=(n-1)!\left[n-\frac{n}{1!}+\frac{1}{0!}+\frac{n}{2!}-\frac{1}{1!}-\frac{n}{3!}+\frac{1}{2!}+\cdots\right.$$

$$+(-1)^m\frac{n}{m!}+(-1)^{m-1}\frac{1}{(m-1)!}+\cdots$$

$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{n}{(n-1)!}+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}\right]$$

$$=(n-1)!\left[n-\frac{n}{1!}+\frac{n}{2!}-\frac{n}{3!}+\cdots+(-1)^m\frac{n}{m!}+\cdots\right.$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{n}{(n-1)!}+(-1)^n\frac{n}{n!}+1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$$

$$+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{1}{(m-1)!}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}$$

$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right]$$

$$=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{m!}+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)+(n-1)!\left(1-\frac{1}{1!}\right.$$

$$+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{1}{(m-1)!}+\cdots$$

$$\left.+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)$$

$$=D_n+D_{n-1}$$

因而本定理得证。

§5. 几个基本概念

在运用抽屉原则和容斥原理时，经常要用到下面几个概念，即完全剩余系、简化剩余系及欧拉函数、麦比乌斯函数

等，因而在本节中将对这些概念给予详细的叙述。

设a，b是任意两个整数，m是一个正整数．如果存在一个整数q，使得$a-b=mq$成立，我们就说a，b对模m同余，记作$a\equiv b(\bmod m)$。

定理 5：如果a,b，c是任意三个整数，m是一个正整数，则当$a\equiv b(\bmod m)$，$b\equiv c(\bmod m)$成立时，有

$$a\equiv c(\bmod m)$$

证明：由$a-b=mq_1$，$b-c=mq_2$，其中q_1，q_2是两个整数，得到$a-b+b-c=mq_1+mq_2$，故有

$$a-c=m(q_1+q_2)$$

其中q_1+q_2是一个整数，因而本定理成立。

定理 6：如果a，b，c是任意三个整数，m是一个正整数且$(m,c)=1$，则当$ac\equiv bc(\bmod m)$时，我们有

$$a\equiv b(\bmod m)。$$

证明：由于$c(a-b)=ac-bc=mq$，其中q是一个整数；又因为$(m,c)=1$，所以我们有$a-b=mq_1$，而其中q_1是一个整数，故本定理成立。

定理 7：如果a，b是任意两个整数，而m,n是两个正整数，则当$a\equiv b(\bmod m)$时，有

$$a^n\equiv b^n(\bmod m)$$

证明：由$a-b=mq$，其中q是一个整数，我们有

$$a^n=(b+mq)^n=b^n+\cdots+(mq)^n=b^n+mq_1$$

其中q_1是一个整数。故有$a^n-b^n=mq_1$，即

$$a^n\equiv b^n(\bmod m)。$$

我们把0，1叫作模 2 的不为负最小完全剩余系。我们把所有偶整数（即$2n$形状的所有整数，其中$n=0$，±1，±2，…）划成一类，把所有奇整数（即 $2n+1$ 形状的所有整数，其中$n=0$，±1，±2，…）划成一类。这样我们就把全体整数分成为两类，即偶整数类和奇整数类。从偶整数类中任意取出一个整数a_1，从奇整数类中任意取出一个整数 a_2。我们把a_1，a_2叫作模 2 的一个完全剩余系。例如0，3 是模 2 的一个完全剩余系，而1，6也是模 2 的一个完全剩余系。如果a_3是一个奇整数而a_4是一个偶整数（或a_3是一个偶整数而a_4是一个奇整数），则a_3，a_4是模 2 的一个完全剩余系。所以说模 2 的完全剩余系的个数有无限多个。

设m是一个大于 2 的整数，我们把0，1，…，$m-1$叫作模m的不为负最小的完全剩余系。我们把能被m整除的所有整数（即mn形状的所有整数，其中$n=0$，±1，±2，…）划成一类；把被m除后，余数是 1 的所有整数（即$mn+1$ 形状的所有整数，其中$n=0$，±1，±2，…）划成一类；…；把被m除后，余数是$m-1$的所有整数（即$mn+m-1$ 形状的所有整数，其中$n=0$，±1，±2，…）划成一类；这样我们就把全体整数分成为m类。如果从每一类当中各取出一个整数，则这m个整数就叫做模m的一个完全剩余系。

例 4：求证-10，-6，-1，2，10，12，14 是模 7 的一个完全剩余系。

证明：由于 $-10\equiv4(\mathrm{mod}7)$，$-6\equiv1(\mathrm{mod}7)$，$-1\equiv6(\mathrm{mod}7)$，$2\equiv2(\mathrm{mod}7)$，$10\equiv3(\mathrm{mod}7)$，$12\equiv5(\mathrm{mod}7)$，

$14\equiv0(\mathrm{mod}7)$，而4，1，6，2，3，5，0和0，1，2，3，4，5，6只是在次序上有不同，故-10，-6，-1，2，10，12，14是模7的一个完全剩余系。

例 5：求证6，9，12，15，18，21，24，27是模8的一个完全剩余系。

证明：由于$6\equiv6(\mathrm{mod}8)$，$9\equiv1(\mathrm{mod}8)$，$12\equiv4(\mathrm{mod}8)$，$15\equiv7(\mathrm{mod}8)$，$18\equiv2(\mathrm{mod}8)$，$21\equiv5(\mathrm{mod}8)$，$24\equiv0(\mathrm{mod}8)$，$27\equiv3(\mathrm{mod}8)$，而6，1，4，7，2，5，0，3和0，1，2，3，4，5，6，7只是在次序上有不同，故6，9，12，15，18，21，24，27是模8的一个完全剩余系。

定理 8：设m是一个大于1的整数，a_1，a_2，…，a_m是模m的一个完全剩余系。如在a_1，a_2，…，a_m中任取出两个整数，则这两个整数对模m是不同余的。

证明：以m为模，则任何一个整数一定和下列m个整数

$$0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$$

之一同余。令r_i（其中$i=1, 2, \cdots, m$）是一个整数，满足条件

$$a_i\equiv r_i(\mathrm{mod}m),\quad 0\leqslant r_i\leqslant m-1 \tag{13}$$

则我们有

$$a_1\equiv r_1(\mathrm{mod}m), a_2\equiv r_2(\mathrm{mod}m), \cdots, a_m\equiv r_m(\mathrm{mod}m) \tag{14}$$

其中$0\leqslant r_1\leqslant m-1$，$0\leqslant r_2\leqslant m-1$，…，$0\leqslant r_m\leqslant m-1$。由于$a_1$，$a_2$，…，$a_m$是模$m$的一个完全剩余系，所以$r_1$，$r_2$，…，$r_m$和0，1，…，$m-1$只是在次序上可能有不同。由于在0，1，…，$m-1$中，任取出两个整数，这两个整数对模$m$是不

同余的，所以在r_1，r_2，…，r_m中任取出两个整数，这两个整数对模m是不同余的。故由(14)式知道，在a_1，a_2，…，a_m中任取出两个整数，则这两个整数对模m是不同余的。

定理 9：设m是一个大于1的整数，而a_1，a_2，…，a_m是m个整数，又设在a_1，a_2，…，a_m中任取出两个整数时，这两个整数对模m是不同余的，则a_1，a_2，…，a_m是模m的一个完全剩余系。

证明：以m为模，则任何一个整数一定和下列m个整数

$$0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$$

之一同余。令r_i（其中$i=1$，2，…，m）是一个整数，满足条件

$$a_i \equiv r_i (\bmod m),\quad 0 \leqslant r_i \leqslant m-1$$

则我们有

$$a_1 \equiv r_1 (\bmod m), a_2 \equiv r_2 (\bmod m), \cdots, a_m \equiv r_m (\bmod m) \quad (15)$$

其中

$$0 \leqslant r_1 \leqslant m-1,\ 0 \leqslant r_2 \leqslant m-1,\ \cdots,\ 0 \leqslant r_m \leqslant m-1。$$

由于(15)式和假设在a_1，a_2，…，a_m中任取出两个整数时，这两个整数对模m不同余，所以当我们在r_1，r_2，…，r_m中任取出两个整数时，这两个整数对模m不同余。所以r_1，r_2，…，r_m和0，1，…，$m-1$只是在次序上可能有不同，即a_1，a_2，…，a_m是模m的一个完全剩余系。

定理10：设m是一个大于1的整数，而a_1，a_2，…，a_m是模m的一个完全剩余系，则当b是一个整数时，a_1+b，a_2+b，…，a_m+b也是模m的一个完全剩余系。

证明：设在a_1+b，a_2+b，…，a_m+b中存在两个整数a_k+b，$a_\lambda+b$（其中$1\leqslant k\leqslant\lambda\leqslant m$），使得

$$a_k+b\equiv a_\lambda+b(\bmod m) \tag{16}$$

成立。我们又有

$$b\equiv b(\bmod m) \tag{17}$$

由(16)式减去(17)式，得到

$$a_k\equiv a_\lambda(\bmod m)$$

由定理 8 和a_1，a_2，…，a_m是模m的一个完全剩余系，知道(16)式是不可能成立的。所以在a_1+b，a_2+b，…，a_m+b中任取出两个整数时，这两个整数对模m不同余，而由定理 9 知道a_1+b，a_2+b，…，a_m+b是模m的一个完全剩余系。

定理11：设m是一个大于 1 的整数，b是一个整数且满足条件$(b, m)=1$。如果a_1，a_2，…，a_m是模m的一个完全剩余系，则ba_1，ba_2，…，ba_m也是模m的一个完全剩余系。

证明：设在ba_1，ba_2，…，ba_m中存在两个整数ba_k，ba_λ（其中$1\leqslant k<\lambda\leqslant m$），使得

$$ba_k\equiv ba_\lambda(\bmod m) \tag{18}$$

成立，则由$(b, m)=1$和定理 6 我们有

$$a_k\equiv a_\lambda(\bmod m)$$

由定理 8 和a_1，a_2，…，a_m是模m的一个完全剩余系，知道(18)式是不可能成立的。所以在ba_1，ba_1，…，ba_m中任取出两个整数时，这两个整数对模m不同余，而由定理 9 知道ba_1，ba_2，…，ba_m是模m的一个完全剩余系。

定理12：设m是一个大于 1 的整数，而b，c是两个任意

的整数但满足条件$(b, m)=1$。如果$a_1, a_2, \cdots, a_m$是模m的一个完全剩余系，则$ba_1+c, ba_2+c, \cdots, ba_m+c$也是模$m$的一个完全剩余系。

证明：由于$a_1, a_2, \cdots, a_m$是模m的一个完全剩余系，从定理11和$(b, m)=1$知道$ba_1, ba_2, \cdots, ba_m$也是模m的一个完全剩余系。由于$ba_1, ba_2, \cdots, ba_m$是模m的一个完全剩余系，从定理10和c是一个整数知道$ba_1+c, ba_2+c, \cdots, ba_m+c$也是模$m$的一个完全剩余系。

例 6：使用定理12来证明例5中的结果。

证明：在定理12中取$m=8$，$b=3$，$c=6$，$a_i=i-1$（其中$1\leqslant i\leqslant 8$）。由于0，1，2，3，4，5，6，7是模8的一个完全剩余系，并且$ba_1+c=6$，$ba_2+c=9$，$ba_3+c=12$，$ba_4+c=15$，$ba_5+c=18$，$ba_6+c=21$，$ba_7+c=24$，$ba_8+c=27$，故由定理12知道6，9，12，15，18，21，24，27是模8的一个完全剩余系。

定理13：如果m是一个大于1的整数而a，b是任意的两个整数，使得

$$a\equiv b(\bmod m)$$

成立，则有$(a, m)=(b, m)$

证明：由$a\equiv b(\bmod m)$得到$a=b+mt$，其中t是一个整数，故有$(b, m)\mid a$。又由$(b, m)\mid m$得到$(b, m)\mid(a,m)$。由$b=a-mt$有$(a, m)\mid b$。又由$(a, m)\mid m$得到$(a,m)\mid(b, m)$。故由$(b, m)\mid(a, m)$和$(a, m)\mid(b, m)$得到$(a, m)=(b, m)$。

定义 1：我们用$\varphi(m)$来表示不大于m而和m互素的正整数的个数。我们把$\varphi(m)$叫做欧拉(Euler)函数。

因为无论n是什么整数，我们都有$(n, 1)=1$，所以1和任何正整数都是互素的。我们又有$\varphi(1)=1$。

定理14：设l是一个正整数，p是一个素数，则我们有

$$\varphi(p^l)=p^{l-1}(p-1)。$$

证明：由于1，2，…，$p-1$中的任何一个整数都是和p互素的，故有$\varphi(p)=p-1$。当$l=1$时有$p^{l-1}=p^0=1$，因而当$l=1$时本定理成立。现设$l>1$，不大于4而和4互素的正整数是1，3，共有2个，故有$\varphi(4)=2$。不大于8而和8互素的正整数是1，3，5，7，共有4个，故有$\varphi(8)=4$。不大于9而和9互素的正整数是1，2，4，5，7，8共有6个；故有$\varphi(9)=6$。而满足条件$l>1$及$p^l\leqslant 9$的p^l只有4，8，9这三个数，并且$\varphi(2^2)=\varphi(4)=2=2^{2-1}(2-1)$，$\varphi(2^3)=\varphi(8)=4=2^{3-1}(2-1)$，$\varphi(3^2)=\varphi(9)=6=3^{2-1}(3-1)$，故当$l>1$而$p^l=9$时本定理成立。现设$l>1$而$p^l\geqslant 10$。在不大于$p^l$的正整数中（共有$p^{l-1}$个正整数，即）

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \cdots,\ p^{l-1}p$$

是p的倍数，而其余的不大于p^l的正整数都是和p互素的。又不大于p^l的正整数共有p^l个，而其中是p的倍数的正整数有p^{l-1}个，故不大于p^l而和p^l互素的正整数的个数是p^l-p^{l-1}，即

$$\varphi(p^l)=p^l-p^{l-1}=p^{l-1}(p-1)。$$

由定理14得到$\varphi(2)=1$，$\varphi(3)=2$，$\varphi(4)=2$，$\varphi(5)=4$，

$\varphi(7)=6$，$\varphi(8)=4$，$\varphi(9)=6$，$\varphi(11)=10$，$\varphi(13)=12$，$\varphi(16)=8$，$(\varphi)(17)=16$，$\varphi(19)=18$。

如果m是一个大于 1 的整数，由定义 1 知道不大于m而和m互素的正整数有$\varphi(m)$个。现设$1<a_2<\cdots<a_{\varphi(m)}$是不大于$m$而和$m$互素的全体正整数。我们把被$m$除后，余数是 1 的所有整数（即$mn+1$ 形状的所有整数，其中$n=0$，±1，±2，…）划成一类；把被m除后，余数是a_2的所有整数（即$mn+a_2$形状的所有整数，其中$n=0$，±1，±2，…）划成一类；…；把被m除后，余数是$a_{\varphi(m)}$的所有整数（即$mn+a_{\varphi(m)}$形状的所有整数，其中$n=0$，±1，±2，…）划成一类。以m为模，则任何一个整数一定和下列m个整数

$$0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$$

之一同余，由定理13知道，如果a和b对于模m同余，则由$(a,\ m)=1$可得到$(b,\ m)=1$。因而以m为模，任何一个和m互素的整数一定和下列$\varphi(m)$个整数

$$1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{\varphi(m)}$$

之一同余。故按照前面分类的方法，我们就把全体和m互素的整数分成为$\varphi(m)$类。从每一类当中各取出一个整数，则这$\varphi(m)$个整数就叫做以m为模的一个简化剩余系。

例 7：求证4，8，16，28，32，44，52，56是模15的一个简化剩余系。

证明：由于小于15而和15互素的正整数共有 8 个，即

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 11,\ 13,\ 14$$

我们有$4\equiv4(\bmod 15)$，$8\equiv8(\bmod 15)$，$16\equiv1(\bmod 15)$，28

$\equiv 13 \pmod{15}$，$32 \equiv 2 \pmod{15}$，$44 \equiv 14 \pmod{15}$，$52 \equiv 7 \pmod{15}$，$56 \equiv 11 \pmod{15}$。

由于4，8，1，13，2，14，7，11和1，2，4，7，8，11，13，14只是在次序上不同，所以4，8，16，28，32，44，52，56是模15的一个简化剩余系。

定理15：设m是一个大于1的整数，b_1，b_2，$\cdots b_{\varphi(m)}$是模m的一个简化剩余系。如在b_1，b_2，$\cdots$，$b_{\varphi(m)}$中任取出两个整数，则这两个整数对模m是不同余的。如在b_1，b_2，$\cdots$，$b_{\varphi(m)}$中任取出一个整数，则这个整数是和m互素的。

证明：设$1<a_2<\cdots<a_{\varphi(m)}$是不大于$m$而和$m$互素的全体正整数。令$r_i$（其中$i=1, 2, \cdots, \varphi(m)$）是一个整数，满足条件

$$b_i \equiv r_i \pmod{m}, \quad 0 \leqslant r_i \leqslant m-1$$

则我们有

$$b_1 \equiv r_1 \pmod{m}, \quad b_2 \equiv r_2 \pmod{m}, \quad \cdots$$

$$b_{\varphi(m)} \equiv r_{\varphi(m)} \pmod{m} \tag{19}$$

其中$0 \leqslant r_1 \leqslant m-1$，$0 \leqslant r_2 \leqslant m-1$，$\cdots$，$0 \leqslant r_{\varphi(m)} \leqslant m-1$。由于$b_1$，$b_2$，$\cdots$，$b_{\varphi(m)}$是模$m$的一个简化剩余系，所以$r_1$，$r_2$，$\cdots$，$r_{\varphi(m)}$和1，$a_2$，$\cdots$，$a_{\varphi(m)}$只是在次序上可能有不同。由于在1，$a_2$，$\cdots$，$a_{\varphi(m)}$中任取出两个整数时，这两个整数对模$m$是不同余的，所以在$r_1, r_2, \cdots, r_{\varphi(m)}$中任取两个整数时，这两个整数对模$m$是不同余的。故由(19)式知道，在$b_1$，$b_2$，$\cdots$，$b_{\varphi(m)}$中任取出两个整数，则这两个整数对模$m$是不同余的。由于在1，$a_2$，$\cdots$，$a_{\varphi(m)}$中，任取出一个整数时，这个

整数和m是互素的。故由(19)式和定理13知道，在b_1，b_2，…，$b_{\varphi(m)}$中任取出一个整数时，则这个整数是和m互素的。

定理16：设m是一个大于1的整数，b_1，b_2，…，$b_{\varphi(m)}$是$\varphi(m)$个和m互素的整数。又设在b_1，b_2，…，$b_{\varphi(m)}$中任取出两个整数时，这两个整数对模m是不同余的，则b_1，b_2，…，$b_{\varphi(m)}$是模m的一个简化剩余系。

证明：设$1<a_2<\cdots<a_{\varphi(m)}$是不大于$m$而和$m$互素的全体正整数。令$r_i$（其中$i=1, 2, \cdots, \varphi(m)$）是一个整数，满足条件

$$b_i \equiv r_i (\bmod m), \quad 0 \leqslant r_i \leqslant m-1$$

则我们有

$$b_1 \equiv r_1 (\bmod m), \quad b_2 \equiv r_2 (\bmod m), \quad \cdots,$$
$$b_{\varphi(m)} \equiv r_{\varphi(m)} (\bmod m) \qquad (20)$$

其中$0 \leqslant r_1 \leqslant m-1$，$0 \leqslant r_2 \leqslant m-1$，…，$0 \leqslant r_{\varphi(m)} \leqslant m-1$。由于在$b_1$，$b_2$，…，$b_{\varphi(m)}$中，任取出一个整数时，这个整数和$m$是互素的，故由(20)式和定理13知道，在$r_1$，$r_2$，…，$r_{\varphi(m)}$中任取出一个整数时，这个整数是和$m$互素的。由于在$b_1$，$b_2$，…，$b_{\varphi(m)}$中任取出两个整数时，这两个整数对模$m$是不同余的，故由(20)式知道，在$r_1$，$r_2$，…，$r_{\varphi(m)}$中任取出两个整数时，则这两个整数对模$m$是不同余的。因而$r_1$，$r_2$，…，$r_{\varphi(m)}$和1，$a_2$，…，$a_{\varphi(m)}$只是在次序上可能有不同，即$b_1$，$b_2$，…，$b_{\varphi(m)}$是模$m$的一个简化剩余系。

定理17：设m是一个大于1的整数，a是一个整数且满足条件$(a, m)=1$。如果b_1，b_2，…，$b_{\varphi(m)}$是模m的一个简

化剩余系，则

$$ab_1,\ ab_2,\ \cdots,\ ab_{\varphi(m)}$$

也是模m的一个简化剩余系。

证明：由于定理15和b_1，b_2，…，$b_{\varphi(m)}$是模m的一个简化剩余系，我们知道在b_1，b_2，…，$b_{\varphi(m)}$中任取出一个整数时，则这个整数和m是互素的。由于$(a,\ m)=1$，我们知道在ab_1，ab_2，…，$ab_{\varphi(m)}$中任取出一个整数时，则这个整数和m是互素的。设在ab_1，ab_2，…，$ab_{\varphi(m)}$中存在两个整数ab_k，ab_λ（其中$1\leqslant k<\lambda\leqslant\varphi(m)$）使得

$$ab_k\equiv ab_\lambda(\bmod m) \tag{21}$$

成立。由$(a,\ m)=1$、(21)式和定理6，我们有

$$b_k\equiv b_\lambda(\bmod m) \tag{22}$$

由于定理15和b_1，b_2，…，$b_{\varphi(m)}$是模m的一个简化剩余系，故在b_1，b_2，…，$b_{\varphi(m)}$中任取出两个整数时，这两个整数对模m是不同余的，故(22)式不成立。从而(21)式不成立。因而在ab_1，ab_2，…，$ab_{\varphi(m)}$中任取出两个整数时，则这两个整数对模m是不同余的。由定理16及在ab_1，ab_2，…，$ab_{\varphi(m)}$中任取出一个整数时，这个整数和m是互素的，得到ab_1，ab_2，…，$ab_{\varphi(m)}$是模m的一个简化剩余系。

定义 2：麦比乌斯(Möbius)函数$\mu(n)$是一个数论函数，它的定义是这样的：

$$\mu(n)=\begin{cases}1 & \text{当}n=1\text{时；}\\(-1)^r & \text{当}n\text{是}r\text{个不同的素数乘积时；}\\0 & \text{当}n\text{能被一个素数的平方除尽时；}\end{cases}$$

由定义容易算出

$\mu(1)=1$，$\mu(2)=-1$，$\mu(3)=-1$，$\mu(4)=0$，

$\mu(5)=-1$，$\mu(6)=1$，$\mu(7)=-1$，$\mu(8)=0$，

$\mu(9)=0$，$\mu(10)=1$，$\mu(11)=-1$，$\mu(12)=0$，

$\mu(13)=-1$，$\mu(14)=1$。

又当 p 是一个素数时，则有$\mu(p)=-1$。

定理18：如果m，n是两个正整数而$(mn)=1$，则我们有

$$\mu(mn)=\mu(m)\cdot\mu(n)。$$

证明：如果m或n能被一个素数的平方除尽，则mn也能够被这个素数的平方除尽，故得到

$$\mu(mn)=0=\mu(m)\cdot\mu(n)$$

如果任何一个素数的平方都不能除尽m，也不能除尽n，则由于$(m, n)=1$而得到任何一个素数的平方都不能够除尽mn。设m有a个不同的素因数，而n有b个不同的素因数，则由于$(m, n)=1$，知道mn有$a+b$个不同的素因数。故得到

$$\mu(mn)=(-1)^{a+b}=(-1)^a(-1)^b=\mu(m)\cdot\mu(n)。$$

定理19：我们有

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\begin{cases}1, & 当n=1时\\ 0, & 当n>1时\end{cases}$$

证明：当$n=1$时，则由于$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\mu(1)=1$，故本定理成立。

现设$n\geqslant 2$是一个整数。当m是一个正整数而$m\mid n$时，我

们使用记号 $\sum\limits_{m|d|n}$ 来表示一个和式，和式中的 d 经过所有能够被 m 除尽的 n 的因数。特别当 $m=1$ 时，则 $\sum\limits_{1|d|n}$ 相同于 $\sum\limits_{d|n}$。现设 p 是一个素数，则我们有

$$\sum_{d|p}\mu(d)=1+\mu(p)=1-1=0 \tag{23}$$

现设 p_1，…，p_l 是 l 个不同的素数，我们首先来证明

$$\sum_{d|p_1\cdots p_l}\mu(d)=0 \tag{24}$$

成立。当 $l=1$ 时，由(23)式知道(24)式成立，现在设 $k\geqslant 2$，而当 $l=1$，…，$k-1$ 时(24)式都成立，即

$$\sum_{d|p_1\cdots p_{k-1}}\mu(d)=0 \tag{25}$$

则由 p_1，…，p_k 是 k 个不同的素数和定理18，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{d|p_1\cdots p_k}\mu(d)&=\sum_{d|p_1\cdots p_{k-1}}\mu(d)+\sum_{p_k|d|p_1\cdots p_k}\mu(d)\\&=(1+\mu(p_k))\sum_{d|p_1\cdots p_{k-1}}\mu(d)\\&=0\end{aligned}$$

故当 $l=k$ 时(24)式也成立，而由数学归纳法知道(24)式成立。

设 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_l^{\alpha_l}$，其中 p_1，…，p_l 是 l 个不同的素数，而 α_1，…，α_l 是 l 个正整数。由于当 d 能够被一个素数的平方除尽时有 $\mu(d)=0$。由(24)式我们有

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|p_1\cdots p_l}\mu(d)=0。$$

故本定理得证。

定理20：设 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_m^{\alpha_m}$，其中 p_1，…，p_m 是 m 个不

同的素数，而α_1，…，α_m都是正整数，则我们有

$$\sum_{d\mid n}|\mu(d)|=2^m$$

证明：由于当d能够被一个素数的平方除尽时有$\mu(d)=0$，故得到

$$\sum_{d\mid n}|\mu(d)|=\sum_{d\mid p_1\cdots p_m}|\mu(d)| \tag{26}$$

我们将证明当$m\geqslant 1$时有

$$\sum_{d\mid p_1\cdots p_m}|\mu(d)|=2^m \tag{27}$$

成立。当$m=1$时，由于

$$\sum_{d\mid p}|\mu(d)|=1+|\mu(p)|=2$$

故(27)式成立。现设$k\geqslant 2$而当$m=1$，2，…，$k-1$时(27)式都能够成立，则由于p_1，…，p_k是k个不同的素数及定理18我们有

$$\begin{aligned}\sum_{d\mid p_1\cdots p_k}|\mu(d)|&=\sum_{d\mid p_1\cdots p_{k-1}}|\mu(d)|+\sum_{p_k\mid d\mid p_1\cdots p_k}|\mu(d)|\\&=(1+|\mu(p_k)|)\sum_{d\mid p_1\cdots p_{k-1}}|\mu(d)|\\&=2^k。\end{aligned}$$

故当$m=k$时(27)式也成立。而由数学归纳法知道(27)式成立。由(27)和(26)式知道本定理成立。

习题

1．请求出1到10000之间不能被13整除，也不能被51整

除的整数的个数。

2．某中学一共有120名高中学生参加数学竞赛。其中，一共出了甲、乙、丙三道题目，竞赛的结果是：12个学生三题都做对了；20个学生做对了甲题和乙题；16个学生做对了甲题和丙题；28个学生做对了乙题和丙题；48个学生做对了甲题；56个学生做对了乙题；16个学生三题都没有做对；请求出做对了丙题的学生有多少个？

3．证明$\varphi(n)$等于1或者等于偶数。

4．设m和n都是正整数，请证明m，$m+1,\cdots,m+n-1$中与n互素的整数的个数是$\varphi(n)$。

5．当n是一个正整数时，请证明$\varphi(n^2)=n\varphi(n)$。又若m也是一个正整数，则有$\varphi(n^m)=n^{m-1}\varphi(n)$。

6．请计算$\varphi(5186)$，$\varphi(5187)$，$\varphi(5188)$。

7．设$n=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_r^{\alpha_r}$，其中$r$与$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_r$都是正整数而$P_1$，$P_2$，…，$P_r$是相异的素数。则我们有从1到正整数$N$中与$n$互素的整数个数为

$$N-\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{N}{P_i}\right]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{N}{P_iP_j}\right]+\cdots+(-1)^r\left[\frac{N}{P_1P_2\cdots P_r}\right]$$

8．求正整数n，使得$\varphi(n)=24$。

9．求证：当n是一个正奇数时，则有

$$\varphi(4n)=2\varphi(n)$$

10．求证：当且仅当$n=2^k$（其中k是正整数）时，则我们有

$$\varphi(n)=\frac{n}{2}.$$

第五章

递推关系与母函数

§1. 几个例子

例 1：设$a_1=1$，$a_2=7$，而当$n\geqslant 3$时，令$a_n=7a_{n-1}-12a_{n-2}$，求a_{42}

解法（Ⅰ）

由$a_1=1$，$a_2=7$ 得到

$$a_3=7\times 7-12\times 1=37;$$

由$a_2=7$，$a_3=37$ 得到

$$a_4=7\times 37-12\times 7=175;$$

由$a_3=37$，$a_4=175$ 得到

$$a_5=7\times 175-12\times 37=781;$$

由$a_4=175$，$a_5=781$ 得到

$$a_6=7\times 781-12\times 175=3367;$$

由$a_5=781$，$a_6=3367$ 得到

$$a_7=7\times3367-12\times781=14197;$$

……………………………………

使用这种计算方法，虽然我们能够求出a_{42}，但是需要的计算量很大，需要计算的时间较长，并且容易发生错误，下面我们将使用较简单的方法来计算a_{42}，

解法(Ⅰ)

令$f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$

$$=x+7x^2+37x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

则我们有

$$\begin{aligned}&f(x)-7xf(x)+12x^2f(x)\\=&x+(7-7)x^2+(37-7\times7+12)x^3+\cdots\\&+(a_n-7a_{n-1}+12a_{n-2})x^n+\cdots\\=&x+0+0+\cdots+0\cdots\\=&x\end{aligned} \tag{2}$$

由(2)和(1)式，我们有

$$f(x)=\frac{x}{1-7x+12x^2}=\frac{x}{(1-4x)(1-3x)}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{1-4x}-\frac{1}{1-3x}=1+(4x)+(4x)^2+(4x)^3\\&+\cdots+(4x)^n+\cdots-1-(3x)-(3x)^2-(3x)^3\\&-\cdots-(3x)^n-\cdots=(4-3)x+(4^2-3^2)x^2\\&+(4^3-3^3)x^3+\cdots+(4^n-3^n)x^n+\cdots\\&=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots\end{aligned}$$

故得到当$n\geqslant 1$时，我们有

$$a_n=4^n-3^n \tag{3}$$

由(3)式得到

$$\begin{aligned}a_{42}&=4^{42}-3^{42}=(4^{21}+3^{21})(4^{21}-3^{21})\\&=[(4^7)^3+(3^7)^3][(4^7)^3-(3^7)^3]\\&=[(16384)^3+(2187)^3][(16384)^3-(2187)^3]\\&=(16384+2187)[(16384)^2-(2187)(16384)\\&\quad+(2187)^2][16384-2187][(16384)^2\\&\quad+(2187)(16384)+(2187)^2]\\&=(18571)(237386617)(14197)(309050233)\\&=(263652487)(237386617)(309050233)\end{aligned}$$

解法(Ⅲ)

当$n\geqslant 3$时，令$a_n=\alpha^n$，则由$a_n=7a_{n-1}-12a_{n-2}$而得到$\alpha^n=7\alpha^{n-1}-12\alpha^{n-2}$，即有

$$\alpha^2-7\alpha+12=0=(\alpha-3)(\alpha-4)$$

故得到当$n\geqslant 2$时，a_n的一般解是

$$a=A\cdot 3^n+B\cdot 4^n \tag{4}$$

在$a_n=7a_{n-1}-12a_{n-2}$中取$n=2$，则有

$$a_2=7a_1-12a_0$$

又由于$a_1=1$，$a_2=7$而得到

$$-12a_0=7-7=0$$

再由$a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=7$而得到

$$A+B=0 \qquad 3A+4B=1$$

从而有$B=1$, $A=-1$, 故由(4)式，我们有

$$a_n = 4^n - 3^n$$

即知道(3)式成立。

例 2：设$a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=2$和$a_3=3$。当$n\geq 4$时，令$a_n=-2a_{n-2}-a_{n-4}$，求a_n的一般解。

解：以$a_n=\alpha^n$代入$a_n=-2a_{n-2}-a_{n-4}$而得到

$$\alpha^n+2\alpha^{n-2}+\alpha^{n-4}=0$$

即有

$$\alpha^4+2\alpha^2+1=(\alpha^2+1)^2=0$$

而$\alpha=\pm i$为二重根，故得到一般解为

$$a_n=A_1i^n+A_2ni^n+A_3(-i)^n+A_4n(-i)^n \tag{5}$$

由$a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$和(5)式，我们有

$$\begin{aligned}0=a_0&=A_1i^0+A_2\cdot 0\cdot i^0+A_3(-i)^0+A_4\cdot 0\cdot(-i)^0\\&=A_1+A_3\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}1=a_1&=A_1i+A_2i+A_3(-i)+A_4(-i)\\&=(A_1+A_2-A_3-A_4)i\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}2=a_2&=A_1i^2+A_2\cdot 2\cdot i^2+A_3(-i)^2+A_4\cdot 2\cdot(-i)^2\\&=-A_1-2A_2-A_3-2A_4\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}3=a_3&=A_1i^3+A_2\cdot 3\cdot i^3+A_3(-i)^3+A_4\cdot 3\cdot(-i)^3\\&=(-A_1-3A_2+A_3+3A_4)i\end{aligned} \tag{9}$$

由(6)式，我们有

$$A_3=-A_1, \tag{10}$$

由(6)和(8)式，我们有$A_2+A_4=-1$，从而得到

$$A_4=-1-A_2 \tag{11}$$

由(7)、(10)和(11)式，我们有

$$2(A_1+A_2)+1=\frac{1}{i}=-i \tag{12}$$

由(9)、(10)和(11)式，我们有 $(-2A_1-6A_2-3)i=3$，从而得到

$$2A_1+6A_2+3=-\frac{3}{i}=3i \tag{13}$$

由(12)和(13)式，我们有$4A_2+2=4i$，即$A_2=-\frac{1}{2}+i$，代入(11)式，则有$A_4=-\frac{1}{2}-i$；由(12)式，我们有 $2A_1+2i=-i$，即得 $A_1=\frac{-3i}{2}$；由(10)式有 $A_3=\frac{3i}{2}$。故由(5)式我们有

$$a_n=-\frac{3}{2}i^{n+1}+\left(-\frac{1}{2}+i\right)ni^n+\frac{3}{2}i(-i)^n$$
$$+\left(-\frac{1}{2}-i\right)n(-i)^n$$

例 3：有人要走上一个楼梯，该人每次能向上走一个阶梯或两个阶梯，我们使用a_n来表示该人走到第 n 个阶梯时所有可能不同走法的种数，请给出a_n的递归关系式。

解：容易看到$a_1=1$；又走上第二个阶梯的方法有连续走两次而每次走一阶梯或一次走上二个阶梯，故有 $a_2=2$；又$a_3=3$；图 1 表示走到第四个阶梯的方法之一，即第一步走一个阶梯，第二步走上两个阶梯而第三步再走上一个阶梯，即1，2，1；另外还有四种不同的走法，即第一步、第二步都走一个阶梯而第三步走上两个阶梯，即1，1，2；又第一

步走上两个阶梯而第二步和第三步都走上一个阶梯，即2，1，1；又有第一步和第二步都走上两个阶梯，即2，2；和从第一步到第四步都各走上一个阶梯，即1，1，1，1，故得到$a_4=5$。当$n\geqslant5$时，如果第一步走一个阶梯，则余下来的还应该走$n-1$个阶梯而它的走法有a_{n-1}种不同的方法（见图

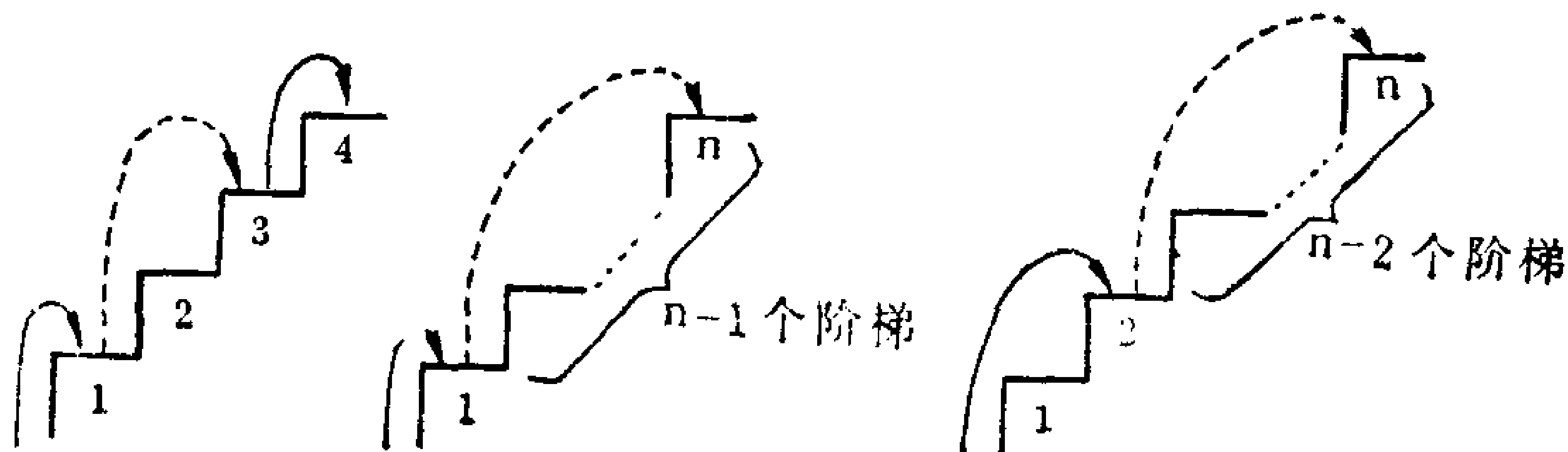


图 1　　图 2　　图 3

2）；如果第一步走上两个阶梯，则余下来的还应该走$n-2$个阶梯而它的走法有a_{n-2}种不同的方法（见图3），故得到

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

例 4：设$a_1=1$，$a_2=2$，当$n\geqslant3$时，令$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，求a_n的一般解。

解：以$a_n=\alpha^n$代入$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$而得到$\alpha^n=\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}$，即有$\alpha^2-\alpha-1=0$，又有

$$\alpha=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

故得到一般解为

$$a_n=A_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n+A_2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{14}$$

在$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$中取$n=2$，则得到$a_0=a_2-a_1=1$。由$a_0=1$，$a_1=1$，和(14)式我们有

$$1=a_0=A_1+A_2 \tag{15}$$

$$1=a_1=A_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+A_2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \tag{16}$$

由(15)式有$A_2=1-A_1$，而由(16)式得到

$$1=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)(A_1-A_2)+\frac{1}{2}(A_1+A_2)=\frac{\sqrt{5}}{2}(A_1-A_2)+\frac{1}{2}$$

因而我们有

$$A_1-A_2=\frac{1}{\sqrt{5}} \tag{17}$$

由(15)式和(17)式得到

$$A_1=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$A_2=1-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

再使用(14)式，我们有

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

§2. 线性递归关系式的解

在本节中我们将简要叙述关于形为

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r} \tag{18}$$

的递归关系式的求解的理论，其中的 c_1，c_2，…，c_r 都是常数。关于(18)式的求解问题有一个简单的方法而这个方法类似于求解具有常数的系数的线性微分方程式，令$a_n = \alpha^n$并将它代入(18)式就得到

$$\alpha^n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\alpha^{n-2} + \cdots + c_r\alpha^{n-r} \tag{19}$$

将α^{n-r}除以(19)式的两边就得到

$$\alpha^r - c_1\alpha^{r-1} - c_2\alpha^{r-2} - \cdots - c_r = 0 \tag{20}$$

我们把方程式(20)叫做递归关系式(18)的特征方程式。它有 r 个根，其中有的根可能是复根（但是我们先假定它们没有重根）。设 α_1，α_2，…，α_r 是(20)式的根，则对于任一个α_i（其中$1 \leqslant i \leqslant r$）而$a_n = \alpha_i^n$就是递归关系式(18)的一个解，容易看出对于这些解的任意线性组合也是它的一个解，即

$$a_n = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \cdots + A_r\alpha_r^n \tag{21}$$

也是(18)式的一个解，其中$A_i(1 \leqslant i \leqslant r)$是任意选取的常数，由于递归关系式(18)式中包含有a_{n-1}，a_{n-2}，…，a_{n-r}，所以说应该先给定 r 个（即 $a_0, a_1, \cdots, a_{r-1}$的）初始值，设这些初始值是$a_0'$，…，$a'_{r-1}$，则对于$a_k'$（其中$0 \leqslant k \leqslant r-1$）我们有

$$a'_k = A_1\alpha_1^k + A_2\alpha_2^k + \cdots + A_r\alpha_r^k \quad 0 \leqslant k \leqslant r-1 \tag{22}$$

可使用(22)式中的 r 个方程式来解出常数 A_1，A_2，…，A_r（其中我们把α_1，α_2，…α_r看作是已知数值的数），当A_i的数值决定之后，代入到(21)式就知道(21)式是(18)式的一个解，并且它满足初始条件，即$a_0=a_0'$，$a_1=a_1'$，…，$a_{r-1}=a'_{r-1}$，当特征方程式(20)式有一个根α_*而它的重数为m次，则在(21)和(22)式中应分别加入α_*^n，$n\alpha_*^n$，…，$n^{(m-1)}\alpha_*^n$。

§3. 第一类 Stirling 数

令$f_1(x)=x$，$f_2(x)=x(x-1)$，而当$n\geqslant 3$时，令$f_n(x)=x(x-1)\cdots(x-n+1)$，则我们有

$$f_1(x)=x,\quad f_2(x)=x^2-x \tag{23}$$

$$f_3(x)=x(x^2-3x+2)=x^3-3x^2+2x$$

$$\begin{aligned}f_4(x)&=x(x-1)(x-2)(x-3)\\&=x\{x^3-(1+2+3)x^2+[(-1)(-2)\\&\quad+(-1)(-3)+(-2)(-3)]x\\&\quad+(-1)(-2)(-3)\}\\&=x(x^3-6x^2+11x-6)\\&=x^4-6x^3+11x^2-6x\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}f_5(x)&=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\\&=x\{x^4+[(-1)+(-2)+(-3)+(-4)]x^3\\&\quad+[(-1)(-2)+(-1)(-3)+(-1)(-4)\\&\quad+(-2)(-3)+(-2)(-4)+(-3)(-4)]x^2\\&\quad+[(-1)(-2)(-3)+(-1)(-2)(-4)\end{aligned}$$

$$+(-1)(-3)(-4)+(-2)(-3)(-4)]x$$
$$+(-1)(-2)(-3)(-4)\}$$
$$=x^5-10x^4+35x^3-50x^2+24x \qquad (25)$$

$$f_6(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$
$$=x\{x^5+[(-1)+(-2)+(-3)+(-4)$$
$$+(-5)]x^4+[(-1)(-2)+(-1)(-3)$$
$$+(-1)(-4)+(-1)(-5)+(-2)(-3)$$
$$+(-2)(-4)+(-2)(-5)+(-3)(-4)$$
$$+(-3)(-5)+(-4)(-5)]x^3$$
$$+[(-1)(-2)(-3)+(-1)(-2)(-4)$$
$$+(-1)(-2)(-5)+(-1)(-3)(-4)$$
$$+(-1)(-3)(-5)+(-1)(-4)(-5)$$
$$+(-2)(-3)(-4)+(-2)(-3)(-5)$$
$$+(-2)(-4)(-5)+(-3)(-4)(-5)]x^2$$
$$+[(-1)(-2)(-3)(-4)+(-1)(-2)(-3)$$
$$\cdot(-5)+(-1)(-2)(-4)(-5)+(-1)(-3)$$
$$\cdot(-4)(-5)+(-2)(-3)(-4)(-5)]x$$
$$+(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)\}$$
$$=x^6-15x^5+85x^4-225x^3+274x^2-120x \qquad (26)$$

使用上面的计算方法，当$n\geqslant 7$时我们可以计算出$f_n(x)=x(x-1)\cdots(x-n+1)$的数值，但由于所需要计算的数值大量增加，因而需要较长时间来进行计算，又由于计算量大大增加故容易发生错误，现在我们要来介绍一种较简单的方法，使用这种方法可以计算出$f_n(x)$的数值，由于$f_n(x)$是 n

个因子相乘而成的，又在它们的展开式中每个因子取 x 或者取负整数，如果我们多取一个 x，则相应地应该少取一个负整数，所以说，$f_n(x)$ 的系数的符号应该是正号和负号相互交替的，即有

$$f_n(x)=x^n-\square x^{n-1}+\square x^{n-2}-\square x^{n-3}+\cdots$$

当$n\geqslant 2$时，我们令

$$f_n(x)=\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}x^n-\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}x^{n-1}+\cdots\pm\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}x \qquad (27)$$

当$n\geqslant 2$时，由(27)式我们知道，只需计算出当$1\leqslant r\leqslant n$时的$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$的数值，即可得到$f_n(x)$的表示式。当$1\leqslant r\leqslant n$时，我们把$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$这些数称为第一类Stirling 数。

例 5：求出$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$的数值。

解：由(23)和(27)式，我们有

$$f_2(x)=x^2-x=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}x^2-\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}x$$

$$f_3(x)=x^3-3x^2+2x=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}x^3-\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}x^2+\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}x$$

由(24)和(27)式，我们有

$$f_4(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x=\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}x^4-\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}x^3+\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}x^2-\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}x$$

故得到

$$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=1,\ \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=1,\ \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=1,\ \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=3,\ \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=2,$$

$$\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}=1,\ \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=6,\ \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=11,\ \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=6。$$

例 6：求出$\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}$的数值。

解：由(25)和(27)式我们有

$$f_5(x)=x^5-10x^4+35x^3-50x^2+24x=$$

$$=\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}x^4-\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}x^4+\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}x^3-\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}x^2+\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}x$$

由(26)和(27)式我们有

$$f_6(x)=x^6-15x^5+85x^4-225x^3+274x^2-120x=$$

$$=\begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix}x^6-\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}x^5+\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}x^4-\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}x^3+\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}x^2$$

$$-\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}x$$

故得到

$$\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}=1,\ \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=10,\ \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=35,\ \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}=50,\ \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=24$$

及$\begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix}=1$，$\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}=15$，$\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}=85$，$\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}=225$，$\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}=274$，

$$\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}=120。\tag{28}$$

定理 1：当$n\geqslant 5$时，我们有

$$\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}=1,\ \begin{bmatrix}n\\n-1\end{bmatrix}=\frac{n(n-1)}{2},\ \begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}=(n-1)!\tag{29}$$

而当$2\leqslant r\leqslant n-2$时，我们有

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}=(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

证明： 当$n\geqslant 5$时，由于$f_n(x)$中x^n的系数是1，故得到$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}=1$；由于$(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$中的常数项是$(-1)(-2)\cdots(-n+1)$，故得到$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}=(n-1)!$；又由于

$$(-1)+(-2)+\cdots+(-n+1)=-[1+2+\cdots+(n-1)]$$

$$=-\frac{n(n-1)}{2}$$

故得到

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}=\frac{n(n-1)}{2}$$

当$2\leqslant r\leqslant n-2$时，我们有

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}x^n-\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}x^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-r}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}x^r+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}x$$

$$=f_n(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2)(x-n+1)$$

$$=(x-n+1)f_{n-1}(x)$$

$$=(x-n+1)\left\{\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}x^{n-1}-\begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix}x^{n-2}+\cdots\right.$$

$$+(-1)^{n-1-r}\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}x^r+(-1)^{n-r}\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}x^{r-1}+\cdots$$

$$\left.+(-1)^n\begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}x\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}x^n-\left\{(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix}\right\}x^{n-1}+\cdots$$

$$+(-1)^{n-r}\left\{(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}\right\}x^r+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}x \qquad (31)$$

比较(31)式两边中x^r的系数就知道(30)式成立，因而本定理得证。

例 7：请由定理 1 和例 5 求出$f_5(x)$和$f_6(x)$的表示式。

解：由(29)式，我们有

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}=1,\quad \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}=1,\quad \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}=\frac{5(5-1)}{2}=10,$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}=\frac{6(6-1)}{2}=15,\quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}=4!=24,\quad \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}=5!=120 \qquad (32)$$

由例 5，我们有

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}=6,\quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=11,\quad \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}=6; \qquad (33)$$

由(30)式和(33)式，我们有

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}=4\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=4\times 6+11=35 \qquad (34)$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}=4\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}=4\times 11+6=50$$

由(30)式，(32)式和(34)式，我们有

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}=5\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}=5\times 10+35=85$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}=5\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}=5\times 35+50=225 \qquad (35)$$

$$\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=5\times 50+24=274$$

由(27)、(32)、(34)和(35)式，我们有

$$f_5(x)=x^5-10x^4+35x^3-50x^2+24x$$

$$f_6(x)=x^6-15x^5+85x^4-225x^3+274x^2-120x$$

例 8：求出$\begin{bmatrix}7\\7\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}8\\8\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}8\\7\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}8\\5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix}$的数值，并写出$f_7(x)$和$f_8(x)$的表示式。

解：由(29)式，我们有

$$\begin{bmatrix}7\\7\end{bmatrix}=1,\quad \begin{bmatrix}8\\8\end{bmatrix}=1,\quad \begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix}=\frac{7(7-1)}{2}=21,\quad \begin{bmatrix}8\\7\end{bmatrix}=\frac{8(8-1)}{2}=28,\quad \begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix}=6!=720,\quad \begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix}=7!=5040 \qquad (36)$$

由(30)和(32)式，我们有

$$\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}=6\times 15+85=175$$

$$\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}=6\times 85+225=735$$

$$\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}=6\times 225+274=1624 \qquad (37)$$

$$\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}=6\times 274+120=1764$$

由(27)、(36)和(37)式，我们有

$$f_7(x)x^7-21x^6+175x^5-735x^4+1624x^3$$
$$-1764x^2+720x。$$

由(30)、(36)和(37)式，我们有

$$\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}=7\times21+175=322$$

$$\begin{bmatrix}8\\5\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=7\times175+735=1960$$

$$\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=7\times735+1624=6769 \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}=7\times1624+1764=13132$$

$$\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix}=7\times1764+720=13068$$

由(27)、(36)和(38)式，我们有

$$f_8(x)=x^8-28x^7+322x^6-1960x^5+6769x^4$$
$$-13132x^3+13068x^2-5040x$$

例 9：求出$\begin{bmatrix}9\\9\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}9\\8\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}9\\7\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}9\\6\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}9\\5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}9\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}9\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}10\\9\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}10\\8\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}10\\7\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}10\\6\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}10\\4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}10\\3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}10\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}10\\1\end{bmatrix}$的数值，并写出$f_9(x)$和$f_{10}(x)$的表达式。

解：由(29)式我们有

$$\begin{bmatrix}9\\9\end{bmatrix}=1，\quad \begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}=1，\quad \begin{bmatrix}9\\8\end{bmatrix}=\frac{9(9-1)}{2}=36，$$

$$\begin{bmatrix}10\\9\end{bmatrix}=\frac{10(10-1)}{2}=45,\quad \begin{bmatrix}9\\1\end{bmatrix}=8!=40320,$$

$$\begin{bmatrix}10\\1\end{bmatrix}=9!=362880。\tag{39}$$

由(30)、(36)和(38)式，我们有

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}9\\7\end{bmatrix}&=8\begin{bmatrix}8\\7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}=8\times28+322=546\\
\begin{bmatrix}9\\6\end{bmatrix}&=8\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8\\5\end{bmatrix}=8\times322+1960=4536\\
\begin{bmatrix}9\\5\end{bmatrix}&=8\begin{bmatrix}8\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}=8\times1960+6769=22449\\
\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}&=8\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}=8\times6769+13132=67284\\
\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}&=8\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}=8\times13132+13068=118124\\
\begin{bmatrix}9\\2\end{bmatrix}&=8\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix}=8\times13068+5040=109584
\end{aligned}\tag{40}$$

由(27)、(39)和(40)式我们有

$$\begin{aligned}
f_9(x)=x^9-36x^8+546x^7-4536x^6+22449x^5\\
-67284x^4+118124x^3-109584x^2+40320x
\end{aligned}$$

由(30)、(39)和(40)式，我们有

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}10\\8\end{bmatrix}&=9\begin{bmatrix}9\\8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9\\7\end{bmatrix}=9\times36+546=870\\
\begin{bmatrix}10\\7\end{bmatrix}&=9\begin{bmatrix}9\\7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9\\6\end{bmatrix}=9\times546+4536=9450\\
\begin{bmatrix}10\\6\end{bmatrix}&=9\begin{bmatrix}9\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9\\5\end{bmatrix}=9\times4536+22449=63273\\
\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}&=9\begin{bmatrix}9\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}=9\times22449+67284=269325
\end{aligned}\tag{41}$$

$$\begin{bmatrix}10\\4\end{bmatrix}=9\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}=9\times67284+118124=723680$$

$$\begin{bmatrix}10\\3\end{bmatrix}=9\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9\\2\end{bmatrix}=9\times118124+109584=1172700$$

$$\begin{bmatrix}10\\2\end{bmatrix}=9\begin{bmatrix}9\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9\\1\end{bmatrix}=9\times109584+40320=1026576$$

由(27)、(39)和(41)式我们有

$$f_{10}(x)=x^{10}-45x^9+870x^8-9450x^7+63273x^6$$
$$-269325x^5+723680x^4-1172700x^3$$
$$+1026576x^2-362880x$$

§4. 母函数

定义 1：设 u_0，u_1，u_2，…，u_n，…是一个无限数列，则称形式幂级数 $u(x)=\sum\limits_{k\geqslant0}u_kx^k$ 是数列 u_0，u_1，u_2，…，u_n，…的母函数，当形式幂级数

$$u(x)=\sum_{k\geqslant0}u_kx^k$$

和形式幂级数

$$V(x)=\sum_{k\geqslant0}V_kx^k$$

相等时，则应有 $u_k=V_k$（其中 $k\geqslant0$）

定义 2：一个数 a 对于形式幂级数 $u(x)$ 的乘积定义为

$$au(x)=\sum_{k\geqslant0}au_kx^k$$

形式幂级数 $u(x)$ 和 $V(x)$ 的相加定义为

$$u(x)+V(x)=\sum_{k\geqslant 0}(u_k+V_k)x^k \tag{42}$$

形式幂级数$u(x)$和$V(x)$相乘定义为

$$u(x)V(x)=\sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{i+j=k}u_iV_j\right)x^k \tag{43}$$

例10：设数列u_0，u_1，u_2，…，u_n，…确定为

$$u_k=\begin{cases}1 & 当0\leqslant k\leqslant n\\ 0 & 当k>n\end{cases}$$

则其母函数为多项式

$$u(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

即$u(x)$可以表示为两个形式幂级数之商。

例11：如果母函数

$$u(x)=\sum_{k\geqslant 0}u_kx^k$$

和

$$V(x)=\sum_{k\geqslant 0}V_kx^k$$

满足条件，$u(x)=(1-x)V(x)$，则我们有

$$\begin{cases}u_0=V_0\\ u_k=V_k-V_{k-1}\end{cases} \tag{44}$$

$$V_k=\sum_{i=0}^{k}u_i \tag{45}$$

证明：由于$\sum\limits_{k\geqslant 0}u_kx^k=u(x)=(1-x)\sum\limits_{k\geqslant 0}V_kx^k=V_0+$

$$\sum_{k\geqslant 1}(V_k-V_{k-1})x^k \tag{46}$$

比较(46)式两边中x^k的系数就知道(44)式成立，由于

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0} V_k x^k = V(x) &= \frac{u(x)}{1-x}\\ &= \Big(\sum_{k\geqslant 0} u_k x^k\Big)(1+x+x^2+\cdots)\\ &= \sum_{k\geqslant 0}\Big(\sum_{i=0}^{k} u_i\Big)x^k\end{aligned}$$

故(45)式成立，因而本例题得证。

定义 3：形式幂级数

$$u(x)=\sum_{k\geqslant 0} u_k x^k$$

的形式微商（记为$D_x u(x)$）定义为形式幂级数$\sum_{k\geqslant 1} k u_k x^{k-1}$，而$D_x$称为形式微分算符，形式幂级数$u(x)=\sum_{k\geqslant 0} u_k x^k$ 的 n 次（其中$n\geqslant 0$）形式微商归纳定义为$D_x(D_x^{n-1}u(x))$。如果存在有一个形式幂级数$V(x)$使得$u(x)=D_x V(x)$，则称$V(x)$为$u(x)$的形式原函数。

容易验证，以下的微商法则成立。

$$D_x(u(x)+V(x))=D_x u(x)+D_x V(x)$$

$$D_x[Cu(x)]=CD_x[u(x)]$$

$$D_x[u(x)V(x)]=u(x)D_x V(x)+V(x)D_x u(x)$$

$$D_x(u(x))^n=n(u(x))^{n-1}D_x u(x)$$

如果形式幂级数$u(x)=\sum_{k\geqslant 0} u_k x^k$在圆$|x|<R$（其中$R>0$）内收敛，这时$u(x)=\sum_{k\geqslant 0} u_k x^k$有其在函数论中的定义，由函数

论中的结果可知，它有唯一的一个和函数$f(x)$并使得在$|x|<R$内有

$$f(x)=\sum_{k\geqslant 0} u_k x^k \tag{47}$$

上式是在圆$|x|<R$内一致收敛，故可以逐项求微商，逐项求原函数，有时$f(x)$还可能是由初等函数经过有限次的代数运算的结果。

如果级数$\sum\limits_{k\geqslant 0} V_k x^k$在圆$|x|<R_1$内收敛，其和函数为$g(x)$，令$R_2=\min(R, R_1)$，而由函数论中的结果可知，级数

$$\sum_{k\geqslant 0}\sum_{i+j=k} u_i V_j x^k \qquad |x|<R_2$$

收敛，其和函数为$f(x)g(x)$。

当我们在进行形式幂级数的形式运算时，如果遇到其中某些幂级数是收敛的，则可以使用它的和函数来代替它参与运算，这时函数论的知识可以用来处理组合论的问题。当然，最后的运算结果可能由于有不收敛的形式幂级数的参与运算而不收敛。故它不具有函数论上的意义，但是它仍然具有组合论上的意义。

下面将举些例子来进行说明。

例 12：在例10中的结果现在可以写成为

$$u(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad |x|<1$$

求一次微商就有：

$$D_x(u(x))=1+2x+\cdots+nx^{n-1}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

作二次微商就有：

$$D_x^2(u(x))=2+6x+12x^2+\cdots+n(n-1)x^{n-2}$$

$$=\frac{2-n(n+1)x^{n-1}+2(n^2-1)x^n-n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}$$

例 13：我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n \quad （其中n\geqslant 1） \tag{48}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x} \quad |x|<1 \tag{49}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}kx^k=\frac{x}{(1-x)^2} \quad |x|<1 \tag{50}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^2x^k=\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \quad |x|<1 \tag{51}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)x^k=\frac{2x^2}{(1-x)^3} \quad |x|<1 \tag{52}$$

证明：由二项式定理显见(48)式成立，由例12知道(49)式成立，对(49)式两边求微商就得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

故(50)式成立，对(50)式两边求微商就得到(51)式，对于

$$\sum_{k=0}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2} \quad |x|<1$$

中的两边求微商就得到(12)式。

总括(48)到(52)式，我们可以把一些常见到的数列(u_i)

$(i\geqslant 0)$的母函数列表如下：

数列 (u_k)	母函数
$\binom{n}{k}$	$(1+x)^n$（其中$n\geqslant 1$）
1	$\frac{1}{1-x}$
k	$\frac{x}{(1-x)^2}$
k^2	$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$
$k(k-1)$	$\frac{2x^2}{(1-x)^3}$

§5. 第二类 Stirling 数

把含有 n 个元素的一个集合分成为恰好有 r 个非空子集合的分拆数目就叫做第二类Stirling 数，并记为$\left\{\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right\}$。又我们定义$\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}=1$而当$n<r$时，由于 n 个元素不可能分拆为 r 个非空子集合，因而当$n<r$时有$\left\{\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right\}=0$。

例 14:请求出$\left\{\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right\}=?$

解：设集合A中含有 4 个元素，即为a，b，c，d。把集合A分拆为二个非空子集合的方法共有：

$a \mid bcd$，$b \mid acd$，$c \mid abd$，$d \mid abc$，$ab \mid cd$，$ac \mid bd$，

$ad|bc$，故得到$\left\{\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right\}=7$。

定理 2：当$n\geqslant1$时 我们有

$$\left\{\begin{matrix}n\\0\end{matrix}\right\}=0,\quad \left\{\begin{matrix}n\\1\end{matrix}\right\}=1,\quad \left\{\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right\}=2^{n-1}-1,$$

$$\left\{\begin{matrix}n\\n-1\end{matrix}\right\}=\binom{n}{2},\quad \left\{\begin{matrix}n\\n\end{matrix}\right\}=1。$$

证明：我们不可能把含有 n 个元素的集合分拆为 0 个非空集合的并，故得到

$$\left\{\begin{matrix}n\\0\end{matrix}\right\}=0$$

我们要把含有 n 个元素的集合分拆为 1 个非空子集合，当然只能分拆为它自己，故得到

$$\left\{\begin{matrix}n\\1\end{matrix}\right\}=1$$

当$n=1$时，由于$\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}=0=1-1=2^{1-1}-1$，故当$n=1$时，我们有$\left\{\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right\}=2^{n-1}-1$。现在我们来讨论当 $n\geqslant2$ 时的情况，假设 n 个元素是a_1，…，a_n，我们把含有a_1 的一类子集合中的任一个子集合记为A_1，把$A-A_1$记为A_2，则 A_1 固定后，A_2也就确定了。A_1的选法共有2^{n-1}种，但由于 A_2 非空，故当A_1含有a_1，…，a_n这 n 个元素的这种取法不满足分拆的定义，因而A_1的取法有$2^{n-1}-1$种，即有

$$\left\{\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right\}=2^{n-1}-1$$

由于$\left\{ {1 \atop 1-1} \right\}=\left\{ {1 \atop 0} \right\}=0=\binom{1}{2}$，故当 $n=1$ 时，我们有 $\left\{ {n \atop n-1} \right\}=\binom{n}{2}$。现在设$n\geqslant 2$，要把含有 n 个元素的集合分拆为$n-1$个非空子集合，则一定有且只有一个子集合包含有 2 个元素，而其余的$n-2$个非空子集合都必须有且只有 1 个元素，因而当含有两个元素的子集合固定以后，则其余的$n-2$ 个子集合也都确定了。由于从 n 个元素中无序取出 2 个元素的方法有$\binom{n}{2}$种，故得到

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\}=\binom{n}{2}$$

又显然$\left\{ {n \atop n} \right\}=1$，即分拆的 n 个非空子集合都有且只有 1 个元素。

综上所述，本定理得证。

定理 3：当$1\leqslant r\leqslant n$时，则我们有

$$\left\{ {n \atop r} \right\}=r\left\{ {n-1 \atop r} \right\}+\left\{ {n-1 \atop r-1} \right\}$$

证明：当$n=1$时，则$r=1$。由于$\left\{ {1 \atop 1} \right\}=1$ 和$\left\{ {0 \atop 1} \right\}=0$，$\left\{ {0 \atop 0} \right\}=1$，我们有

$$\left\{ {1 \atop 1} \right\}=1=0+1=1\cdot\left\{ {0 \atop 1} \right\}+\left\{ {0 \atop 0} \right\}=1\cdot\left\{ {1-1 \atop 1} \right\}+\left\{ {1-1 \atop 1-1} \right\}$$

即当$n=1$时，本定理结论成立。

现在我们设$n\geqslant 2$，假定这 n 个元素是a_1，…，a_n，要分

拆为 r 个非空子集合，则其中或者存在有一个子集合，它只包含有a_n这一个元素，或者不存在有一个子集合而它只包含有a_n这一个元素。当存在有一个子集合，它只包含有a_n这一个元素时，则剩下来的$n-1$个元素应分别包含在$r-1$个子集合中。故在这种情况下，分拆的方法有$\left\{\begin{matrix}n-1\\r-1\end{matrix}\right\}$种。若不存在有一个子集合而它只包含有$a_n$这一个元素，即含有$a_n$的这个子集合一定还含有别的元素，我们把$a_n$这个元素删去后，只剩下$a_1$，…，$a_{n-1}$这$n-1$个元素，把它们分拆为 r 个非空子集合的方法有$\left\{\begin{matrix}n-1\\r\end{matrix}\right\}$种，又由于$a_n$可以在这 r 个子集合中的任意一个子集合中，故在这种情况下的分拆数为 $r\left\{\begin{matrix}n-1\\r\end{matrix}\right\}$。因而由加法原则，我们得到

$$\left\{\begin{matrix}n\\r\end{matrix}\right\}=r\left\{\begin{matrix}n-1\\r\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}n-1\\r-1\end{matrix}\right\}$$

所以本定理得证。

§6. Bernourlli 数

若实数 $|x|<2\pi$，则我们定义

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n \tag{53}$$

其中B_n就称为Bernourlli数。若 y 是一个实数，则我们定义

$$\frac{xe^{xy}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(y)}{n!}x^n \tag{54}$$

其中$B_n(y)$是与y有关的函数。

定理 4：当y是一个实数而n是一个非负整数时，则我们有

$$B_n(y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k} \tag{55}$$

证明： 由于$e^{xy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xy)^n}{n!}$、(53)和(54)式而得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(y)}{n!}x^n=\frac{xe^{xy}}{e^x-1}=\frac{x}{e^x-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xy)^n}{n!}$$

$$=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m}{m!}x^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xy)^n}{n!}\right)$$

比较上式两边中的x^n系数，则我们有

$$\frac{B_n(y)}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

即是

$$B_n(y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k y^{n-k}$$

故本定理得证。

定理 5：当$n\geqslant1$时，则我们有

$$B_n(y+1)-B_n(y)=ny^{n-1} \tag{56}$$

特别当$n\geqslant2$时，则我们有

$$B_n(0)=B_n(1) \tag{57}$$

证明：我们有下面的恒等式

$$x\frac{e^{(y+1)x}}{e^x-1}-x\frac{e^{yx}}{e^x-1}=xe^{yx}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(yx)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}x^{n+1}$$

由上式和(54)式我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(y+1)-B_n(y)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}x^{n+1}$$

比较上式两边中x^n（其中$n\geqslant 1$）的系数，则我们有

$$\frac{B_n(y+1)-B_n(y)}{n!}=\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}$$

于是

$$B_n(y+1)-B_n(y)=ny^{n-1}$$

故(56)式成立。当$n\geqslant 2$时，在(56)式中令$y=0$，立即可得$B_n(0)=B_n(1)$。故本定理得证。

定理 6：当$n\geqslant 2$时，则我们有

$$B_{n-1}=-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}B_k \qquad (58)$$

证明：在(55)式中取$y=1$，即可得到

$$B_n(1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

又由(53)和(54)式，我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(0)}{n!}x^n=\frac{xe^{x\cdot 0}}{e^x-1}=\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

比较上式两边中x^n的系数，即有

$$B_n(0)=B_n$$

由于(57)式和上式，我们得到

$$B_n = B_n(0) = B_n(1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

于是

$$B_{n-1} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}B_k$$

因而本定理得证。

定理 7： 当 m 和 n 都是正整数时，令 $S_n(m) = \sum_{k=1}^{m} k^n$，则我们有

$$S_n(m) = \frac{1}{n+1}(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}) \tag{59}$$

证明： 当$n \geqslant 1$时，则由(56)式我们有

$$(n+1)k^n = B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k) \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

将上面m个式子的两边相加，则有

$$(n+1)\sum_{k=1}^{m} k^n = B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(0)$$
$$= B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}$$

故(59)式成立。因而本定理得证。

定理 8： 当 k 是一个正整数时，令$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$，则我们有

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}$$

证明： 因证明较长，这里就不给予证明了，若读者感兴趣的话，可以参考 Tom M. Aposto, Springer-Verlag. New York Iteidelberg Berlin 1976.

习题

1.令$F_1=F_2=1$，而当$n\geqslant 3$时，令$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，则我们有

(i) $F_n=\frac{a^n-b^n}{\sqrt{5}}$

其中$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(ii) $F_n=\left[\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\right]+C_n$

其中：当$d\geqslant 0$时，使用$[d]$来表示d的整数部分；而当n是偶数时，令$C_n=0$；当n是奇数时，令$C_n=1$。

2.令$L_1=1$，$L_2=3$，而当$n\geqslant 3$时，令$L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$，则我们有

(i) $L_n=a^n+b^n$

(ii) $L_n=[a^n]+(-1)^n+C_n$

其中a，b，C_n的定义与习题1一样。

3.求证：当$n\geqslant 1$时，则我们有

(i) 若F_n是奇数时，则L_n也是奇数并有

$$(F_n, L_n)=1$$

(ii) 若F_n是偶数时，则L_n也是偶数并有

$$(F_n, L_n)=2$$

4.求证：当$n\geqslant 1$时，则我们有

$$(F_n,\ F_{n+1})=(L_n,\ L_{n+1})=1$$

5.请证明：对于任意的正整数 n 和 m，我们都有

$$F_m \mid F_{nm}$$

6.当 k 是一个正整数时，则我们有

$$(F_{4k},\ F_{4k+2})=1$$

7.设 n 是一个正整数，则使得$2\mid F_n$成立的充分和必要条件是：n 是 3 的倍数；使得$3\mid F_n$成立的充分和必要条件是：n 是 4 的倍数。

8.假设我们有 n 元钱，其中 n 是一个正整数。又设每天我们都要到商店去购买下列三种商品之一：第一种商品是蔬菜，要用 1 元钱；第二种商品是猪肉，要用 2 元钱；第三种商品是鸡蛋，要用 2 元钱。我们使用记号 B_n 来表示把这 n 元钱用完的所有可能之用法的总数。请表示出 B_n 的数学式子。

9.已知$B_1=1$，$B_2=3$，$B_3=5$，$B_4=11$，请由递推关系式$B_n=B_{n-1}+2B_{n-2}$求出B_n的一般表达式。

10.请证明：当 n 是一个正整数时，则有$3\mid 2^{n+1}+(-1)^n$

11.请求出当$0\leqslant n\leqslant 10$时的B_n的数值。

12.请求出当$1\leqslant k\leqslant 5$时的$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2k}=?$

13.求证：当$n\geqslant 1$时，则我们有

$$B_{2n+1}=0$$

14.求证：当$n\geqslant 4$时，则我们有

$$\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-5)$$

15.求证：当$n\geq 6$时，则我们有

$$\left\{ {n \atop n-3} \right\} = \binom{n}{4} + 10\binom{n}{5} + 15\binom{n}{6}$$

第六章

关于杨辉高斯级数

§1. 引言

设 n 和 m 是正整数，我们把 n^m 叫做 n 的 m 次方，即 $n^m = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m个}$，例如 $2^3 = 2\times 2\times 2 = 8$。

从 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 很容易联想到的一个问题：是否 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 以及 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ 也能找简单的公式来算它们的和？公元前二百多年希腊著名科学家阿基米德就已经知道这两个和是

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$$

但是他的证明比较复杂，我们将用比较简单的方法来证明上面二式成立。

又在阿基米德以后的希腊数学家要想知道 $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$ 的公式，却是无能为力，这个和的公式要在一千多年后，也就是在十一世纪时阿拉伯数学家才知道。

§2. 杨辉高斯级数的推广

本节的目的是要证明下面的定理：

定理 1：令 n 和 m 都是正整数，又令 $N=n(n+1)$，$M=2n+1$，则我们有

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = F(n,\ m)$$

其中

$$F(n,\ 1)=\frac{1}{2}N \qquad F(n,\ 2)=\frac{1}{6}MN$$

$$F(n,\ 3)=\frac{1}{4}N^2 \qquad F(n,\ 4)=\frac{1}{30}MN(3N-1)$$

$$F(n,\ 5)=\frac{1}{12}N^2(2N-1)$$

$$F(n,\ 6)=\frac{1}{42}MN(3N^2-3N+1)$$

$$F(n,\ 7)=\frac{1}{24}N^2(3N^2-4N+2)$$

$$F(n,\ 8)=\frac{1}{90}MN(5N^3-10N^2+9N-3)$$

$$F(n,\ 9)=\frac{1}{20}N^2(2N^3-5N^2+6N-3)$$

$$F(n,\ 10)=\frac{1}{66}MN(3N^4-10N^3+17N^2-15N+5)$$

为了证明这个定理，我们先证明下面二个引理。

引理 1：当n和m都是正整数时，则我们有

$$(m+1)\sum_{i=1}^{n}i^m=n(n+1)^m-\sum_{j=2}^{m}\binom{m}{j}\sum_{i=1}^{n}i^{m-j+1}$$

其中当$m\geq 2$，$1\leq j\leq m-1$时，我们用记号

$$\binom{m}{j}=\frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)}{j!}$$

$$=\frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)\cdot(m-j)\cdots 2\cdot 1}{(j!)(m-j)\cdots 2\cdot 1}$$

$$=\frac{m!}{(j!)(m-j)!}$$

又用记号$\binom{m}{0}=\binom{m}{m}=1$，而当$j>m$时，则使用记号$\binom{m}{j}=0$

证明：我们有

$$n(n+1)^m=(n+1)^{m+1}-(n+1)^m$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1}i^{m+1}-\sum_{i=1}^{n}i^{m+1}-\sum_{i=1}^{n+1}i^m+\sum_{i=1}^{n}i^m$$

$$=1+\sum_{i=2}^{n+1}i^{m+1}-\sum_{i=1}^{n}i^{m+1}-1-\sum_{i=2}^{n+1}i^m+\sum_{i=1}^{n}i^m$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(i+1)^{m+1}-\sum_{i=1}^{n}(i+1)^m-\sum_{i=1}^{n}i^{m+1}$$

$$+\sum_{i=1}^{n} i^m$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^{m+1}-(i+1)^m-i^{m+1}+i^m]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[i(i+1)^m-i^{m+1}+i^m] \tag{1}$$

由二项式定理，我们有

$$(i+1)^m=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}i^{m-j} \tag{2}$$

由(1)和(2)式，我们有

$$n(n+1)^m=\sum_{i=1}^{n}\left[i\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}i^{m-j}-i^{m+1}+i^m\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{m}{0}i^{m+1}+\binom{m}{1}i^m+\sum_{j=2}^{m}\binom{m}{j}i^{m-j+1}\right.$$

$$\left.-i^{m+1}+i^m\right]$$

$$=(m+1)\sum_{i=1}^{n}i^m+\sum_{j=2}^{m}\binom{m}{j}\sum_{i=1}^{n}i^{m-j+1}$$

所以我们得到

$$(m+1)\sum_{i=1}^{n}i^m=n(n+1)^m-\sum_{j=2}^{m}\binom{m}{j}\sum_{i=1}^{n}i^{m-j+1}$$

因而本引理得证。

引理 2：当 n 和 m 都是正整数时，我们令 $N=n(n+1)$，$M=2n+1$，则有

$$2(n+1)^m=f(n,\ m)$$

其中

$$f(n,\ 1)=M+1 \qquad f(n,\ 2)=2N+M+1 \tag{3}$$

$$f(n,\ 3)=MN+3N+M+1 \tag{4}$$

$$f(n,\ 4)=2N^2+2MN+4N+M+1 \tag{5}$$

$$f(n,\ 5)=MN^2+5N^2+3MN+5N+M+1 \tag{6}$$

$$f(n,6)=2N^3+3MN^2+9N^2+4MN+6N+M+1 \tag{7}$$

$$f(n,\ 7)=MN^3+7N^3+6MN^2+14N^2+5MN+7N+M+1 \tag{8}$$

$$f(n,\ 8)=2N^4+4MN^3+16N^3+10MN^2+20N^2+6MN+8N+M+1 \tag{9}$$

$$f(n,\ 9)=MN^4+9N^4+10MN^3+30N^3+15MN^2+27N^2+7MN+9N+M+1 \tag{10}$$

证明： 我们有

$$f(n,\ 1)=2(n+1)=(2n+1)+1=M+1$$

$$f(n,\ 2)=2(n+1)^2=2n^2+4n+2$$
$$=2n(n+1)+(2n+1)+1=2N+M+1$$

故(3)式成立。我们有

$$f(n,3)=2(n+1)^3=2(n+1)^2(n+1)$$
$$=(2n^2+4n+2)(n+1)=(2n^2+n+3n+2)(n+1)$$
$$=(2n+1)n(n+1)+3n(n+1)+(2n+1)+1$$
$$=MN+3N+M+1$$

故(4)式成立。我们有

$$f(n,\ 4)=2(n+1)^4=2(n+1)^2(n+1)^2$$
$$=2(n^2+2n+1)(n+1)^2$$
$$=2n^2(n+1)^2+2(2n+1)(n+1)(n+1)$$
$$=2N^2+2[(2n+1)n+2n+1](n+1)$$
$$=2N^2+2(2n+1)n(n+1)+4n(n+1)$$

$$+(2n+1)+1$$

$$=2N^2+2MN+4N+M+1$$

故(5)式成立。我们有

$$f(n,\ 5)=2(n+1)^5=2(n+1)^3(n+1)^2$$
$$=2(n^3+3n^2+3n+1)(n+1)^2$$
$$=[(2n^3+n^2)+5n^2+6n+2](n+1)^2$$
$$=(2n+1)n^2(n+1)^2+5n^2(n+1)^2+(6n+2)$$
$$\cdot(n+1)(n+1)$$
$$=MN^2+5N^2+(6n^2+8n+2)(n+1)$$
$$=MN^2+5N^2+[(6n^2+3n)+5n+2](n+1)$$
$$=MN^2+5N^2+3(2n+1)n(n+1)+5n(n+1)$$
$$+(2n+1)+1$$
$$=MN^2+5N^2+3MN+5N+M+1$$

故(6)式成立。我们有

$$f(n,\ 6)=2(n+1)^6=2(n+1)^3(n+1)^3$$
$$=2(n^3+3n^2+3n+1)(n+1)^3$$
$$=2n^3(n+1)^3+2(3n^2+3n+1)(n+1)(n+1)^2$$
$$=2N^3+2(3n^3+6n^2+4n+1)(n+1)^2$$
$$=2N^3+[(6n^3+3n^2)+9n^2+8n+2](n+1)^2$$
$$=2N^3+3(2n+1)n^2(n+1)^2+9n^2(n+1)^2$$
$$+(8n+2)(n+1)(n+1)$$
$$=2N^3+3MN^2+9N^2+(8n^2+10n+2)(n+1)$$
$$=2N^3+3MN^2+9N^2+[(8n^2+4n)$$
$$+6n+2](n+1)$$

$$=2N^3+3MN^2+9N^2+4(2n+1)n(n+1)$$
$$+6n(n+1)+(2n+1)+1$$
$$=2N^3+3MN^2+9N^2+4MN+6N+M+1$$

故(7)式成立。我们有

$$f(n,\ 7)=2(n+1)^7=2(n+1)^4(n+1)^3$$
$$=2(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)(n+1)^3$$
$$=[(2n^4+n^3)+7n^3+12n^2+8n+2](n+1)^3$$
$$=(2n+1)n^3(n+1)^3+7n^3(n+1)^3$$
$$+(12n^2+8n+2)(n+1)(n+1)^2$$
$$=MN^3+7N^3+(12n^3+20n^2+10n+2)(n+1)^2$$
$$=MN^3+7N^3+[(12n^3+6n^2)+14n^2$$
$$+10n+2](n+1)^2$$
$$=MN^3+7N^3+6(2n+1)n^2(n+1)^2+14n^2$$
$$(n+1)^2+(10n+2)(n+1)(n+1)$$
$$=MN^3+7N^3+6MN^2+14N^2+(10n^2$$
$$+12n+2)(n+1)$$
$$=MN^3+7N^3+6MN^2+14N^2+[(10n^2+5n)$$
$$+7n+2](n+1)$$
$$=MN^3+7N^3+6MN^2+14N^2+5(2n+1)n$$
$$\cdot(n+1)+7n(n+1)+(2n+1)+1$$
$$=MN^3+7N^3+6MN^2+14N^2+5MN+7N$$
$$+M+1$$

故(8)式成立。我们有

$$f(n,\ 8)=2(n+1)^8=2(n+1)^4(n+1)^4$$

$$=2(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)(n+1)^4$$

$$=2n^4(n+1)^4+2(4n^3+6n^2+4n+1)(n+1)(n+1)^3$$

$$=2N^4+2(4n^4+10n^3+10n^2+5n+1)(n+1)^3$$

$$=2N^4+2[(4n^4+2n^3)+8n^3+10n^2+5n+1](n+1)^3$$

$$=2N^4+4(2n+1)n^3(n+1)^3+16n^3(n+1)^3+2(10n^2$$

$$+5n+1)(n+1)(n+1)^2$$

$$=2N^4+4MN^3+16N^3+2(10n^3+15n^2+6n$$

$$+1)(n+1)^2$$

$$=2N^4+4MN^3+16N^3+2[(10n^3+5n^2)+10n^2$$

$$+6n+1](n+1)^2$$

$$=2N^4+4MN^3+16N^3+10(2n+1)n^2(n+1)^2$$

$$+20n^2(n+1)^2+2(6n+1)(n+1)(n+1)$$

$$=2N^4+4MN^3+16N^3+10MN^2+20N^2+2(6n^2$$

$$+7n+1)(n+1)$$

$$=2N^4+4MN^3+16N^3+10MN^2+20N^2+2[(6n^2$$

$$+3n)+4n+1](n+1)$$

$$=2N^4+4MN^3+16N^3+10MN^2+20N^2+6(2n+1)$$

$$\cdot n(n+1)+8n(n+1)+(2n+1)+1$$

$$=2N^4+4MN^3+16N^3+10MN^2+20N^2+6MN$$

$$+8N+M+1$$

故(9)式成立。我们有

$$f(n,9)=2(n+1)^9=2(n+1)^5(n+1)^4$$

$$=2(n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1)(n+1)^4$$

$$=[(2n^5+n^4)+9n^4+20n^3+20n^2+10n$$

$$+2](n+1)^4$$

$$=(2n+1)n^4(n+1)^4+9n^4(n+1)^4+(20n^3+20n^2+10n+2)(n+1)(n+1)^3$$

$$=MN^4+9N^4+(20n^4+40n^3+30n^2+12n+2)(n+1)^3$$

$$=MN^4+9N^4+[(20n^4+10n^3)+30n^3+30n^2+12n+2](n+1)^3$$

$$=MN^4+9N^4+10(2n+1)n^3(n+1)^3+30n^3(n+1)^3+(30n^2+12n+2)\cdot(n+1)(n+1)^2$$

$$=MN^4+9N^4+10MN^3+30N^3+(30n^3+42n^2+14n+2)(n+1)^2$$

$$=MN^4+9N^4+10MN^3+30N^3+[(30n^3+15n^2)+27n^2+14n+2](n+1)^2$$

$$=MN^4+9N^4+10MN^3+30N^3+15(2n+1)n^2\cdot(n+1)^2+27n^2(n+1)^2+(14n+2)(n+1)(n+1)$$

$$=MN^4+9N^4+10MN^3+30N^3+15MN^2+27N^2+(14n^2+16n+2)(n+1)$$

$$=MN^4+9N^4+10MN^3+30N^3+15MN^2+27N^2+[(14n^2+7n)+9n+2](n+1)$$

$$=MN^4+9N^4+10MN^3+30N^3+15MN^2+27N^2+7(2n+1)n(n+1)+9n(n+1)+(2n+1)+1$$

$$=MN^4+9N^4+10MN^3+30N^3+15MN^2+27N^2+7MN+9N+M+1$$

故(10)式成立。因而本引理得证。

定理 1 的证明： 在引理 1 中取$m=1$，我们有

$$(1+1)\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1) = N$$

所以得到

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{N}{2} \tag{11}$$

在引理1中取$m=2$，且由(3)及(11)式，我们有

$$(2+1)\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)^2 - \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= N(n+1) - \frac{1}{2}N$$

$$= N\cdot\frac{M+1}{2} - \frac{1}{2}N$$

$$= \frac{1}{2}MN$$

所以得到

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}MN \tag{12}$$

在引理1中取$m=3$，且由(3)及(11)，(12)式，我们有

$$(3+1)\sum_{i=1}^{n} i^3 = n(n+1)^3 - \binom{3}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= N(n+1)^2 - \frac{3}{6}MN - \frac{1}{2}N$$

$$= N\left[\frac{1}{2}(2N+M+1) - \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}\right]$$

$$= N^2$$

所以得到

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}N^2 \tag{13}$$

在引理 1 中取$m=4$，且由(4)式及(11)到(13)式我们有

$$(4+1)\sum_{i=1}^{n} i^4 = n(n+1)^4 - \binom{4}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \binom{4}{3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= N(n+1)^3 - \frac{6}{4}N^2 - \frac{4}{6}MN - \frac{1}{2}N$$

$$= N\left[\frac{1}{2}(MN+3N+M+1) - \frac{3}{2}N - \frac{2}{3}M - \frac{1}{2}\right]$$

$$= N\left(\frac{1}{2}MN - \frac{1}{6}M\right)$$

$$= \frac{1}{6}MN(3N-1)$$

所以得到

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{30}MN(3N-1) \tag{14}$$

在引理 1 中取$m=5$，且由(5)及(11)到(14)式，我们有

$$(5+1)\sum_{i=1}^{n} i^5 = n(n+1)^5 - \binom{5}{2}\sum_{i=1}^{n} i^4 - \binom{5}{3}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \binom{5}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= N(n+1)^4 - \frac{10}{30}MN(3N-1) - \frac{10}{4}N^2 - \frac{5}{6}MN - \frac{1}{2}N$$

$$= N\left[\frac{1}{2}(2N^2+2MN+4N+M+1)\right.$$

$$-\frac{1}{3}M(3N-1)-\frac{5}{2}N-\frac{5}{6}M-\frac{1}{2}\Big]$$

$$=N\Big(N^2+MN+2N+\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}-MN-\frac{5}{2}N$$

$$-\frac{1}{2}M-\frac{1}{2}\Big)$$

$$=N\Big(N^2-\frac{1}{2}N\Big)$$

$$=\frac{1}{2}N^2(2N-1)$$

所以得到

$$\sum_{i=1}^{n} i^5=\frac{1}{12}N^2(2N-1) \tag{15}$$

在引理 1 中取$m=6$，且由(6)及(11)到(15)式，我们有

$$(6+1)\sum_{i=1}^{n} i^6=n(n+1)^6-\binom{6}{2}\sum_{i=1}^{n} i^5-\binom{6}{3}\sum_{i=1}^{n} i^4$$

$$-\binom{6}{4}\sum_{i=1}^{n} i^3-\binom{6}{5}\sum_{i=1}^{n} i^2-\sum_{i=1}^{n} i$$

$$=N(n+1)^5-\frac{15}{12}N^2(2N-1)-\frac{20}{30}MN(3N$$

$$-1)-\frac{15}{4}N^2-\frac{6}{6}MN-\frac{1}{2}N$$

$$=N\Big[\frac{1}{2}(MN^2+5N^2+3MN+5N+M+1)$$

$$-\frac{5}{2}N^2-\frac{5}{2}N-\frac{1}{2}-2MN-\frac{1}{3}M\Big]$$

$$=N\left(\frac{1}{2}MN^2-\frac{1}{2}MN+\frac{1}{6}M\right)$$

$$=\frac{1}{6}MN(3N^2-3N+1)$$

所以得到

$$\sum_{i=1}^{n}i^6=\frac{1}{42}MN(3N^2-3N+1) \tag{16}$$

在引理 1 中取$m=7$，且由(7)及(11)到(16)式，我们有

$$(7+1)\sum_{i=1}^{n}i^7=n(n+1)^7-\binom{7}{2}\sum_{i=1}^{n}i^6-\binom{7}{3}\sum_{i=1}^{n}i^5$$

$$-\binom{7}{4}\sum_{i=1}^{n}i^4-\binom{7}{5}\sum_{i=1}^{n}i^3-\binom{7}{6}\sum_{i=1}^{n}i^2-\sum_{i=1}^{n}i$$

$$=N(n+1)^6-\frac{21}{42}MN(3N^2-3N+1)-\frac{35}{12}N^2$$

$$\cdot(2N-1)-\frac{35}{30}MN(3N-1)-\frac{21}{4}N^2$$

$$-\frac{7}{6}MN-\frac{1}{2}N$$

$$=N\Big[\frac{1}{2}(2N^3+3MN^2+9N^2+4MN+6N$$

$$+M+1)-\frac{3}{2}MN^2-2MN-\frac{1}{2}M-\frac{35}{6}N^2$$

$$-\frac{7}{3}N-\frac{1}{2}\Big]$$

$$=N\left(N^3-\frac{4}{3}N^2+\frac{2}{3}N\right)$$

$$=\frac{1}{3}N^2(3N^2-4N+2)$$

所以得到

$$\sum_{i=1}^{n} i^7=\frac{1}{24}N^2(3N^2-4N+2) \tag{17}$$

在引理1中取$m=8$，且由(8)及(11)到(17)式，我们有

$$\begin{aligned}(8+1)\sum_{i=1}^{n} i^8 &= n(n+1)^8-\binom{8}{2}\sum_{i=1}^{n} i^7-\binom{8}{3}\sum_{i=1}^{n} i^6\\
&\quad -\binom{8}{4}\sum_{i=1}^{n} i^5-\binom{8}{5}\sum_{i=1}^{n} i^4-\binom{8}{6}\sum_{i=1}^{n} i^3\\
&\quad -\binom{8}{7}\sum_{i=1}^{n} i^2-\sum_{i=1}^{n} i\\
&= N(n+1)^7-\frac{28}{24}N^2(3N^2-4N+2)-\frac{56}{42}MN\\
&\quad \cdot(3N^2-3N+1)-\frac{70}{12}N^2(2N-1)-\frac{56}{30}MN\\
&\quad \cdot(3N-1)-\frac{28}{4}N^2-\frac{8}{6}MN-\frac{1}{2}N\\
&= N\Big[\frac{1}{2}(MN^3+7N^3+6MN^2+14N^2+5MN\\
&\quad +7N+M+1)-\frac{7}{2}N^3-7N^2-\frac{7}{2}N-\frac{1}{2}\\
&\quad -4MN^2-\frac{8}{5}MN-\frac{4}{5}M\Big]\\
&= N\left(\frac{1}{2}MN^3-MN^2+\frac{9}{10}MN-\frac{3}{10}M\right)\\
&= \frac{1}{10}MN(5N^3-10N^2+9N-3)\end{aligned}$$

所以得到

$$\sum_{i=1}^{n} i^8 = \frac{1}{90} MN(5N^3 - 10N^2 + 9N - 3) \qquad (18)$$

在引理 1 中取$m=9$，且由(9)及(11)到(18)式，我们有

$$\begin{aligned}
(9+1)\sum_{i=1}^{n} i^9 &= n(n+1)^9 - \binom{9}{2}\sum_{i=1}^{n} i^8 - \binom{9}{3}\sum_{i=1}^{n} i^7 \\
&\quad - \binom{9}{4}\sum_{i=1}^{n} i^6 - \binom{9}{5}\sum_{i=1}^{n} i^5 - \binom{9}{6}\sum_{i=1}^{n} i^4 \\
&\quad - \binom{9}{7}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \binom{9}{8}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i \\
&= N(n+1)^8 - \frac{36}{90} MN(5N^3 - 10N^2 + 9N \\
&\quad - 3) - \frac{84}{24} N^2(3N^2 - 4N + 2) - \frac{126}{42} MN(3N^2 \\
&\quad - 3N + 1) - \frac{126}{12} N^2(2N - 1) - \frac{84}{30} MN(3N \\
&\quad - 1) - \frac{36}{4} N^2 - \frac{9}{6} MN - \frac{1}{2} N \\
&= N\Big[\frac{1}{2}(2N^4 + 4MN^3 + 16N^3 + 10MN^2 \\
&\quad + 20N^2 + 6MN + 8N + M + 1) - 2MN^3 \\
&\quad - 5MN^2 - 3MN - \frac{1}{2} M - \frac{21}{2} N^3 - 7N^2 \\
&\quad - \frac{11}{2} N - \frac{1}{2}\Big] \\
&= N\left(N^4 - \frac{5}{2} N^3 + 3N^2 - \frac{3}{2} N\right)
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}N^2(2N^3-5N^2+6N-3)$$

所以得到

$$\sum_{i=1}^{n} i^9=\frac{1}{20}N^2(2N^3-5N^2+6N-3) \qquad (19)$$

在引理 1 中取$m=10$，且由(10)到(19)式，我们有

$$(10+1)\sum_{i=1}^{n} i^{10}$$

$$=n(n+1)^{10}-\binom{10}{2}\sum_{i=1}^{n} i^9-\binom{10}{3}\sum_{i=1}^{n} i^8-\binom{10}{4}\sum_{i=1}^{n} i^7$$

$$-\binom{10}{5}\sum_{i=1}^{n} i^6-\binom{10}{6}\sum_{i=1}^{n} i^5-\binom{10}{7}\sum_{i=1}^{n} i^4-\binom{10}{8}\sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$-\binom{10}{9}\sum_{i=1}^{n} i^2-\sum_{i=1}^{n} i$$

$$=N(n+1)^9-\frac{45}{20}N^2(2N^3-5N^2+6N-3)-\frac{120}{90}MN$$

$$\cdot\left(5N^3-10N^2+9N-3\right)-\frac{210}{24}N^2(3N^2-4N+2)$$

$$-\frac{252}{42}MN(3N^2-3N+1)-\frac{210}{12}N^2(2N-1)$$

$$-\frac{120}{30}MN(3N-1)-\frac{45}{4}N^2-\frac{10}{6}MN-\frac{1}{2}N$$

$$=N\Big[\frac{1}{2}(MN^4+9N^4+10MN^3+30N^3+15MN^2$$

$$+27N^2+7MN+9N+M+1)-\frac{9}{2}N^4-15N^3$$

$$-\frac{27}{2}N^2-\frac{9}{2}N-\frac{1}{2}-\frac{20}{3}MN^3-\frac{14}{3}MN^2-6MN+\frac{1}{3}M\Big]$$

$$=N\left(\frac{1}{2}MN^4-\frac{5}{3}MN^3+\frac{17}{6}MN^2-\frac{5}{2}MN+\frac{5}{6}M\right)$$

$$=\frac{1}{6}MN(3N^4-10N^3+17N^2-15N+5)$$

所以得到

$$\sum_{i=1}^{n} i^{10}=\frac{1}{66}MN(3N^4-10N^3+17N^2-15N+5) \qquad (20)$$

由(11)到(20)知道定理 1 成立。

§3．差分表

考虑一个对于所有实数 x 都有定义的函数$f(x)$，我们把

$$f(0) \quad f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad f(4) \quad f(5) \quad f(6)\cdots\cdots$$

叫做第一行。我们令在下一行中的数是由第一行中相邻二个数之差所组成的，即，$f(1)-f(0)$，$f(2)-f(1)$，$f(3)-f(2)$，$f(4)-f(3)$，$f(5)-f(4)$，$f(6)-f(5)$，…，并叫它为第二行。我们令$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$，则第二行中的数即为$\Delta f(x)$在$x=0$，1，2，…时所取的数值，我们叫它做$f(x)$的第一次差分。我们令在第三行中的数是由第二行中相邻二个数之差所组成的，并叫它做第三行。我们令

$$\Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x))=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)$$

由于

$$\Delta f(x+1)=f(x+2)-f(x+1)$$

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$$

而有

$$\Delta^2 f(x)=f(x+2)-2f(x+1)+f(x)$$

故第三行中的数即为$\Delta^2 f(x)$在$x=0$，1，2，… 时所取的数值。我们叫它做$f(x)$的第二次差分。当$k\geqslant 3$时，我们令在$k+1$行中的数是由第k行中相邻二个数的差所组成的。当$k\geqslant 3$时，我们使用归纳法来定义$\Delta^k f(x)$即为$\Delta^k f(x)=\Delta^{k-1}f(x+1)-\Delta^{k-1}f(x)$，我们得$\Delta^k f(x)$在$x=0$，1，2，…时所取的数值叫它做$f(x)$的第$k$次差分。我们定义$\Delta^0 f(x)=f(x)$并把$f(x)$在$x=0$，1，2，…时所取的数值叫做$f(x)$的第0次差分。我们在书写一个函数的差分表时，当我们写到某一行时，如果这时出现某一行所有的数都是0，则差分表就只需写到那行为止，这是由于从那行以后所有的行中的数一定都是0。

例 1：函数$f(x)=2x^2+3x+1$的差分表中的第一行是

1　6　15　28　45　66　91　…

这也是$f(x)$的第0次差分。又$f(x)$的差分表中的第二行是

5　9　13　17　21　25　…

这也是$f(x)$的第一次差分。又$f(x)$的差分表中的第三行是

4　4　4　4　4　4　…

这也是$f(x)$的第二次差分。又$f(x)$的差分表中的第四行是

0　0　0　0　0　0　…

这也是$f(x)$的第三次差分。又当$k\geqslant 4$时，则$f(x)$的差分表

中的第 k 行都是0，0，0，…，即$2x^2+3x+1$的差分表是

1	6	15	28	45	66	91	…
5	9	13	17	21	25	…	
4	4	4	4	4	…		
0	0	0	0	…			

在学习差分理论时，我们常要用到下面关于多项式的二个引理，而这二个引理在高等数学书中都已给过证明了。

引理 3：如果$f(x)$是一个多项式并存在有无限多个 x 能使$f(x)=0$成立，则$f(x)$一定是恒等于0。

引理 4：设$f(x)$和$g(x)$是二个多项式而它们的次数都不大于 n，如果存在有$n+1$个不同的数 x 使得 $f(x)=g(x)$，则对于所有的数 x 都有$f(x)=g(x)$。

推论 1：如果二个多项式具有相同的差分表，则这二个多项式应该对于所有的数 x 都相等。

引理 5：设$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$是一个 n 次的多项式，则$f(x)$的差分表中第$n+1$行应该全部为0。

证明：我们对 n 使用归纳法来证明本引理。当$n=0$时则有$f(x)=a_0$，由于a_0是一个常数，故$f(x)$的一次差分全是0。现设对于所有次数小于 n 的多项式本引理都能够成立。即设，对于所有次数为 k（其中$0\leqslant k<n$）的多项式，则它的差分表中的$k+1$行全是0，当我们删去$f(x)$的差分表中的第一行后，则$f(x)$的差分表中余下来的部份也就是$\Delta f(x)$的差分表。于是$f(x)$的差分表中的第$n+1$行相同于$\Delta f(x)$的差

分表中的第 n 行。我们有

$$\begin{aligned}\Delta f(x)&=f(x+1)-f(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}a_k(x+1)^k-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\\&=\sum_{k=0}^{n}a_k[(x+1)^k-x^k]\end{aligned}\tag{21}$$

由二项式定理，我们有

$$(x+1)^k-x^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i-x^k=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}x^i\tag{22}$$

由(21)和(22)式，我们知道$\Delta f(x)$是一个次数$\leqslant n-1$的多项式，而由归纳法假设我们知道$\Delta f(x)$的差分表中的第 n 行全是 0，于是$f(x)$的差分表中的第$n+1$行全为 0，故由数学归纳法知道本引理成立。

现在我们来考虑二个函数$P(x)$和$Q(x)$，令

$$f(x)=P(x)+Q(x)$$

由于

$$\begin{aligned}&f(x+1)-f(x)\\&=[P(x+1)+Q(x+1)]-[P(x)+Q(x)]\\&=[P(x+1)-P(x)]+[Q(x+1)-Q(x)]\end{aligned}$$

于是我们知道$f(x)$的差分表中的数是由$P(x)$和 $Q(x)$的差分表中相应的数相加而得到的。我们也可以说$f(x)$的差分表是$P(x)$和$Q(x)$的差分表的和。又如果 c 和 d 是常数而 $g(x)=cP(x)+dQ(x)$，则$g(x)$的差分表是由$P(x)$的差分表中所有的数都乘以 c 而$Q(x)$的差分表中所有的数都乘以 d 然后再把相应的数相加而得到的。

例如$P(x)=x^2+x+1$的差分表是

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & 3 & & 7 & & 13 & & 21 & & 31 & & 43 & & \cdots \\
& 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & 12 & & \cdots & \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & &
\end{array}$$

表(1)

而$Q(x)=x^2-x-2$的差分表是

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
-2 & & -2 & & 0 & & 4 & & 10 & & 18 & & 28 & & \cdots \\
& 0 & & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & \cdots & \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & &
\end{array}$$

表(2)

令$g(x)=5x^2-x-4$，则由于$g(x)=2P(x)+3Q(x)$而得到$g(x)$的差分表是由表(1)中所有的数都乘以2和表(2)中所有的数都乘以3然后再把相应的数加起来而得到的，即有

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
-4 & & 0 & & 14 & & 38 & & 72 & & 116 & & 170 & & \cdots \\
& 4 & & 14 & & 24 & & 34 & & 44 & & 54 & & \cdots & \\
& & 10 & & 10 & & 10 & & 10 & & 10 & & \cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & &
\end{array}$$

一般地，我们来考虑k(其中$k\geqslant 2$)个函数$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_k(x)$和k个常数c_1，c_2，…，c_k，令$f(x)=\sum_{i=1}^{k} C_i f_i(x)$，那么$f(x)$的差分表可由$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_k(x)$的差分表使用相似方法而得到的。

我们还应该注意到“一个函数的差分表是由它的左边沿着边缘的那些数所决定的”，也就是说 $f(x)$ 的差分表是由 $f(0)$，$\Delta f(0)$，$\Delta^2 f(0)$，…所决定的。

例 2：请求出下面差分表中的a，r，u，w，b，s，v，c，t，d的数值。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
2 & & a & & b & & c & & d & & \cdots \\
& -1 & & r & & s & & t & & \cdots & \\
& & 3 & & u & & v & & \cdots & & \\
& & & o & & w & & \cdots & & & \\
& & & & 0 & & \cdots & & & &
\end{array}
$$

解：由于$a-2=-1$，$r-(-1)=3$，$u-3=0$，$w-0=0$，我们有$a=1$，$r=2$，$u=3$，$w=0$；

由于$b-1=b-a=r=2$，$s-2=s-r=u=3$，$v-3=v-u=w=0$，我们有$b=3$，$s=5$，$v=3$；

由于$c-3=c-b=s=5$，$t-5=t-s=v=3$而得到 $c=8$，$t=8$；

由于$d-8=d-c=t=8$而得到$d=16$；于是我们的差分表是

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
2 & & 1 & & 3 & & 8 & & 16 & & \cdots \\
& -1 & & 2 & & 5 & & 8 & & \cdots & \\
& & 3 & & 3 & & 3 & & \cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & \cdots & & & \\
& & & & 0 & & \cdots & & & &
\end{array}
$$

现在我们来考虑一个 n 次的多项式$f(x)$，并设它的差分

表中的左边边缘是c_0，c_1，c_2，…，c_n，0，0，…，当$k=0$，1，2，…时，我们令$f_k(x)$是一个多项式而它的差分表中左边边缘是0，0，0，…，0，1，0，0，0，…，而在这个数列中只含有一个1，其余的数都是0，又其中1是在差分表中的第$k+1$行，则$\sum\limits_{k=0}^{n}c_kf_k(x)$的差分表中的左边边缘应是$c_0$，$c_1$，$c_2$，…，$c_n$，0，0，…，因而$f(x)$的差分表中的左边边缘完全相同于$\sum\limits_{k=0}^{n}c_kf_k(x)$的差分表中的左边边缘。由于差分表中左边边缘完全决定了整个差分表。因而$f(x)$和$\sum\limits_{k=0}^{n}c_kf_k(x)$具有相同的差分表。于是对于所有的数$x$我们都有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kf_k(x) \tag{23}$$

上式供给我们一种表示式，即使用$f_0(x)$，$f_1(x)$，…，$f_k(x)$来描写$f(x)$。

定理 2：设$f(x)$是一个n次的多项式而它的差分表中左边边缘是c_0，c_1，c_2，…，c_n，0，0，…，则我们有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\binom{x}{k}$$

证明：我们知道当$k\geqslant0$时，则$f_k(x)$的差分表中的左边边缘是0，0，…，0，1，0，0，…，在这个数列中只含有一个1而其余的数都是0，又其中1是在差分表中的第$k+1$行；由于

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

故当$0\leqslant n\leqslant k-1$时有$\binom{n}{k}=0$。又由于$\binom{x}{k}$是一个$k$次的多项式和$\binom{k}{k}=1$而得到$\binom{x}{k}$的差分表中左边边缘是0，0，…，0，1，0，0，…，在这个数列中只有第$k+1$项是1而其余的数都是0，因而$\binom{x}{k}$的差分表中的左边边缘完全相同于$f_k(x)$的差分表中的左边边缘。由于差分表中左边边缘完全决定了整个差分表，因而$f_k(x)$和$\binom{x}{k}$具有相同的差分表，于是对于所有的数x我们都有$f_k(x)=\binom{x}{k}$，故当$k\geqslant 0$时，我们有

$$f_k(x)=\binom{x}{k} \tag{24}$$

由(23)式和(24)式我们知道本定理成立。

例 3：请证明

$$x^3+2x^2-3x+2=6\binom{x}{3}+10\binom{x}{2}+2\binom{x}{0}$$

证明：令$f(x)=x^3+2x^2-3x+2$，则我们有

$f(0)=2$，$f(1)=2$，$f(2)=12$，$f(3)=38$，$f(4)=86$，$f(5)=162$，

于是$f(x)$的差分表是

2	2	12	38	86	162	…
0	10	26	48	76	…	
10	16	22	28	…		
6	6	6	…			
0	0	…				

由于$f(x)$的次数是 3，故$f(x)$的差分表中左边边缘是2，0，10，6，0，0，…，故由定理 2，我们有

$$f(x)=6\binom{x}{3}+10\binom{x}{2}+2\binom{x}{0}$$因而本例题得证。

引理 6：设$f(x)$是一个 n 次的多项式，则存在有唯一的常数数列a_0，a_1，a_2，…，a_n使得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\binom{x}{k} \tag{25}$$

成立。

证明：由定理 2 知道存在有一个常数数列 a_0，a_1，…，a_n使得(25)式成立。现设还存在有另外一个常数数列b_0，b_1，b_2，…，b_n使得(25)式也成立，则我们有

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k-b_k)\binom{x}{k}=0 \tag{26}$$

在(26)式中取 $x=0$ 得到 $a_0=b_0$，现在由数学归纳法假设当$0\leqslant k\leqslant m$（其中$0\leqslant m<n$）时，我们都有
$a_k=b_k$，由(26)式我们得到

$$\sum_{k=m+1}^{n}(a_k-b_k)\binom{x}{k}=0 \tag{27}$$

在(27)式中取$x=m+1$，则得到$a_{m+1}=b_{m+1}$，故由数学归纳法知道当$0\leqslant k\leqslant n$时，我们都有 $a_k=b_k$，因而本引理得证。

引理 7：对于非负整数m和n，我们都有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

证明：当$m=0$时，由于$\binom{0}{0}=1=\binom{1}{1}$而有$\binom{0}{m}=\binom{1}{m}$；

当$m\geqslant 1$时则有$\binom{0}{m}=0$，$\binom{1}{m+1}=0$，故当$m\geqslant 0$时，我们有

$$\binom{0}{m}=\binom{1}{m+1} \tag{28}$$

固定一个m，我们对n进行归纳法来证明本引理成立。当$n=0$时，则由(28)式知道本引理成立。

现在我们假设当$0\leqslant n\leqslant N$时本引理都能够成立，则我们有

$$\sum_{k=0}^{N+1}\binom{k}{m}=\sum_{k=0}^{N}\binom{k}{m}+\binom{N+1}{m}$$

$$=\binom{N+1}{m+1}+\binom{N+1}{m}$$

$$=\binom{N+2}{m+1}$$

故本引理对于$N+1$也成立。因而由数学归纳法知道本引理成立。

定理 3：设$f(x)$是一个n次的多项式而它的差分表中左边边缘是c_0，c_1，c_2，…，c_n，0，0，…，则对于任一个正整数M，我们都有

$$\sum_{m=0}^{M}f(m)=\sum_{k=0}^{n}c_k\binom{M+1}{k+1}$$

证明：由定理 2 和引理 7 我们有

$$\sum_{m=0}^{M}f(m)=\sum_{m=0}^{M}\sum_{k=0}^{n}c_k\binom{m}{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{M}\binom{m}{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} c_k \binom{M+1}{k+1}$$

故本定理成立。

例 4：设m是一个正整数，请证明

$$\sum_{k=0}^{m} k^4=\binom{m+1}{2}+14\binom{m+1}{3}+36\binom{m+1}{4}+24\binom{m+1}{5}$$

证明：设$f(x)=x^4$，则由于$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=16$，$f(3)=81$，$f(4)=256$，$f(5)=625$，$f(6)=1296$. 从而得x^4的差分表

0	1	16	81	256	625	1296	…
1	15	65	175	369	671	…	
14	50	110	194	302	…		
36	60	84	108	…			
24	24	24	…				
0	0	…					

由定理 3，我们有

$$\therefore \sum_{k=0}^{m} k^4=\binom{m+1}{2}+14\binom{m+1}{3}+36\binom{m+1}{4}+24\binom{m+1}{5}.$$

故本例题得证。

例 5：设m是一个正整数，请证明

$$\sum_{k=0}^{m} k^5=\binom{m+1}{2}+30\binom{m+1}{3}+150\binom{m+1}{4}+240\binom{m+1}{5}+120\binom{m+1}{6}$$

证明：设$f(x)=x^5$，则由$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=$

32，$f(3)=243$，$f(4)=1024$，$f(5)=3125$，$f(6)=7776$，$f(7)=16807$，…而得到x^5的差分表

0　1　32　243　1024　3125　7776　16807　…

1　31　211　781　2101　4651　9031　…

30　180　570　1320　2550　4380　…

150　390　750　1230　1830　…

240　360　480　600　…

120　120　120　…

0　0　…

由定理 3，我们有

$$\sum_{k=0}^{m} k^5=\binom{m+1}{2}+30\binom{m+1}{3}+150\binom{m+1}{4}+240\binom{m+1}{5}+120\binom{m+1}{6}$$

故本例题得证。

例 6：设m是一个正整数，请证明

$$\sum_{k=0}^{m} k^6=\binom{m+1}{2}+62\binom{m+1}{3}+540\binom{m+1}{4}+1560\binom{m+1}{5}+1800\binom{m+1}{6}+120\binom{m+1}{7}$$

证明：设$f(x)=x^6$，则由$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=64$，$f(3)=729$，$f(4)=4096$，$f(5)=15625$，$f(6)=46656$，$f(7)=117649$，$f(8)=262144$，…，而得到 x^6 的差分表是

0　1　64　729　4096　15625　46656　117649　262144　…

1　63　665　3367　11529　31031　70993　144495　…

62 602 2702 8162 19502 39962 73502 …

540 2100 5460 11340 20460 33540 …

1560 3360 5880 9120 13080 …

1800 2520 3240 3960 …

720 720 720 …

0 0 …

由定理 3，我们有

$$\sum_{k=0}^{m} k^6=\binom{m+1}{2}+62\binom{m+1}{3}+540\binom{m+1}{4}+1560\binom{m+1}{5}$$
$$+1800\binom{m+1}{6}+720\binom{m+1}{7}$$

故本例题得证。

例 7：设m是一个正整数，试证明

$$\sum_{k=0}^{m} k^7=\binom{m+1}{2}+126\binom{m+1}{3}+1806\binom{m+1}{4}$$
$$+8400\binom{m+1}{5}+16800\binom{m+1}{6}+15120\binom{m+1}{7}$$
$$+5040\binom{m+1}{8}$$

证明：设$f(x)=x^7$，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=128$，$f(3)=2187$，$f(4)=16384$，$f(5)=78125$，$f(6)=279936$，$f(7)=823543$，$f(8)=2097152$，…而得x^7的差分表是

0 1 128 2187 16384 78125 279936 823543 2097152 …

1 127 2059 14197 61741 201811 543607 1273609 …

126 1932 12138 47544 140070 341796 730002 …

1806 10206 35406 92526 201726 388206 …

8400 25200 57120 109200 186480 …

16800 31920 52080 77280 …

15120 20160 25200 …

5040 5040 …

0 …

由定理 3，我们有

$$\sum_{k=0}^{m} k^7=\binom{m+1}{2}+126\binom{m+1}{3}+1806\binom{m+1}{4}+8400\binom{m+1}{5}$$
$$+16800\binom{m+1}{6}+15120\binom{m+1}{7}+5040\binom{m+1}{8}$$

故本例题得证。

例 8：设m是一个正整数，试证明

$$\sum_{k=0}^{m} k^8=\binom{m+1}{2}+254\binom{m+1}{3}+5796\binom{m+1}{4}$$
$$+40824\binom{m+1}{5}+126000\binom{m+1}{6}+191520\binom{m+1}{7}$$
$$+141120\binom{m+1}{8}+40320\binom{m+1}{9}$$

证明：设$f(x)=x^8$，由$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=256$，$f(3)=6561$，$f(4)=65536$，$f(5)=390625$，$f(6)=1679616$，$f(7)=5764801$，$f(8)=16777216$，$f(9)=43046721$，… 而得x^8的差分表是

0 1 256 6561 65536 390625 1679616 5764801 16777216 43046721 …

1 255 6305 58975 325089 1288991 4085185 11012415 26269505 …

254 6050 52670 266114 963902 2796194 6927230 15257090 …

5796　46620　213444　697788　1832292　4131036　8329860　…

40824　166824　484344　1134504　2298744　4198824　…

126000　317520　650160　1164240　1900080　…

191520　332640　514080　735840　…

141120　181440　221760　…

40320　40320　…

0　…

由定理 3，我们有

$$\sum_{k=0}^{m} k^8=\binom{m+1}{2}+254\binom{m+1}{3}+5796\binom{m+1}{4}$$
$$+40824\binom{m+1}{5}+126000\binom{m+1}{6}+191520\binom{m+1}{7}$$
$$+141120\binom{m+1}{8}+40320\binom{m+1}{9}$$

故本例题得证。

例 9：设 m 是一个正整数，请求出 $\sum_{k=0}^{m} k^9$ 和 $\sum_{k=0}^{m} k^{10}$ 各等于多少？

解：设 $f(x)=x^9$，可以用同样的方法来进行计算，但计算量很大，需要较长时间来进行计算。现在我们把结果写出来。$f(x)$ 的差分表中左边边缘的各数为 $c_0=0$，$c_1=1$，$c_2=510$，$c_3=18150$，$c_4=186480$，$c_5=834120$，$c_6=1905120$，$c_7=2328480$，$c_8=1451520$，$c_9=362880$，故由定理 3，我们有

$$\sum_{k=0}^{m} k^9=\binom{m+1}{2}+510\binom{m+1}{3}+18150\binom{m+1}{4}$$
$$+186480\binom{m+1}{5}+834120\binom{m+1}{6}+1905120\binom{m+1}{7}$$

$$+2328480\binom{m+1}{8}+1451520\binom{m+1}{9}+362880\binom{m+1}{10}$$

设 $g(x)=x^{10}$，也可以用同样的方法来进行计算，但计算量更大，需要更长的时间来进行计算。我们也把计算的结果写出来。$g(x)$的差分表中左边边缘的各数为$c_0=0, c_1=1$，$c_2=1022$，$c_3=55980$，$c_4=818520$，$c_5=5103000$，$c_6=16435440$，$c_7=29635200$，$c_8=30240000$，$c_9=16329600$，$c_{10}=3628800$，故由定理 3，我们有

$$\sum_{k=0}^{m} k^{10}=\binom{m+1}{2}+1022\binom{m+1}{3}+55980\binom{m+1}{4}$$

$$+818520\binom{m+1}{5}+5103000\binom{m+1}{6}$$

$$+16435440\binom{m+1}{7}+29635200\binom{m+1}{8}$$

$$+30240000\binom{m+1}{9}+16329600\binom{m+1}{10}$$

$$+3628800\binom{m+1}{11}$$

故本例题得解。

§4. 我们的新计算方法

定理 4：设 n 和 x 都是正整数，又设

$$x^n=\sum_{l=0}^{n} c(n,\ l)\binom{x}{l} \tag{29}$$

其中$c(n,\ l)$是一个与 n 和 l 都有关的常数，则我们有

$$c(n,\ 0)=0,\ c(n,\ 1)=1,\ c(n,\ n)=n! \tag{30}$$

又当$1\leqslant l\leqslant n-1$时，则我们有

$$c(n,\ l)=l[c(n-1,\ l)+c(n-1,\ l-1)] \tag{31}$$

证明： 由于$\binom{0}{0}=1$，(29)式和当$l\geqslant1$时有$\binom{0}{l}=0$而得到$0=0^n=\sum_{l=0}^{n}c(n,\ l)\binom{0}{l}=c(n,\ 0)$，故我们有

$$c(n,\ 0)=0 \tag{32}$$

由于$\binom{1}{0}=1$，$\binom{1}{1}=1$，(29)式和当$l\geqslant2$时，有$\binom{1}{l}=0$而得到$1=1^n=\sum_{l=0}^{n}c(n,\ l)\binom{1}{l}=c(n,\ 0)+c(n,\ 1)$，故由(32)式我们有

$$c(n,\ 1)=1 \tag{33}$$

当$1\leqslant l\leqslant n-1$时，由(29)和(32)式，我们有

$$\sum_{l=1}^{n}c(n,\ l)\binom{x}{l}=\sum_{l=0}^{n}c(n,\ l)\binom{x}{l}=x^n=x\cdot x^{n-1}$$

$$=x\sum_{l=0}^{n-1}c(n-1,\ l)\binom{x}{l}=\sum_{l=0}^{n-1}c(n-1,\ l)x\binom{x}{l}$$

$$=\sum_{l=0}^{n-1}c(n-1,\ l)(l+x-l)\binom{x}{l}$$

$$=\sum_{l=0}^{n-1}lc(n-1,\ l)\binom{x}{l}+\sum_{l=0}^{n-1}c(n-1,\ l)(x-l)\binom{x}{l}$$

$$=0+\sum_{l=1}^{n-1}lc(n-1,\ l)\binom{x}{l}+\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)c(n$$

$$-1,\ l)\frac{x-l}{l+1}\binom{x}{l}$$

$$=\sum_{l=1}^{n-1} lc(n-1,\ l)\binom{x}{l}+\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)c(n-1,\ l)\binom{x}{l+1}$$

$$=\sum_{l=1}^{n-1} lc(n-1,\ l)\binom{x}{l}+\sum_{l=1}^{n} lc(n-1,\ l-1)\binom{x}{l}$$

$$=\sum_{l=1}^{n-1} lc(n-1,\ l)\binom{x}{l}+\sum_{l=1}^{n-1} lc(n-1,l-1)\binom{x}{l}$$

$$+nc(n-1,\ n-1)\binom{x}{n}$$

$$=\sum_{l=1}^{n-1} l[c(n-1,\ l)+c(n-1,\ l-1)]\binom{x}{l}$$

$$+nc(n-1,\ n-1)\binom{x}{n} \tag{34}$$

比较(34)式两边就得到

$$c(n,\ n)=nc(n-1,\ n-1) \tag{35}$$

当$1\leqslant l\leqslant n-1$时，比较(34)式的两边我们有

$$c(n\cdot l)=l[c(n-1,\ l)+c(n-1,\ l-1)] \tag{36}$$

由(33)式和反复用(35)式我们有

$$c(n,\ n)=n(n-1)c(n-2,\ n-2)=\cdots$$

$$=n(n-1)\cdots 2c(1\cdot 1)=n! \tag{37}$$

故由(32)、(33)和(37)式我们知道(30)式成立，由(36)式知道(31)式成立，所以本定理得证。

定理 5：设m和n都是正整数，则有

$$\sum_{k=1}^{m} k^n=\sum_{l=1}^{n} c(n,\ l)\binom{m+1}{l+1} \tag{38}$$

证明：由(29)、(30)式和引理7，我们有

$$\sum_{k=1}^{m} k^n=\sum_{k=1}^{m}\ \sum_{l=0}^{n} c(n,\ l)\binom{k}{l}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}c(n,\ l)\binom{k}{l}$$

$$=\sum_{l=1}^{n}c(n,\ l)\sum_{k=1}^{m}\binom{k}{l}$$

$$=\sum_{l=1}^{n}c(n,\ l)\binom{m+1}{l+1}$$

因而本定理得证。

现在我们利用上面的结果来求$1\leqslant n\leqslant 10$时，$\sum_{k=1}^{m}k^n$的公式。

在(38)式中取$n=1$，并由(30)式，我们有

$$\sum_{k=1}^{m}k=c(1,\ 1)\binom{m+1}{2}=\binom{m+1}{2} \tag{39}$$

在(38)式中取$n=2$，并由(30)式，我们有

$$\sum_{k=1}^{m}k^2=c(2,\ 1)\binom{m+1}{2}+c(2,\ 2)\binom{m+1}{3}$$

$$=\binom{m+1}{2}+2\binom{m+1}{3} \tag{40}$$

在(38)式中取$n=3$，并由(30)和(31)式，我们有

$$\sum_{k=1}^{m}k^3=c(3,\ 1)\binom{m+1}{2}+c(3,2)\binom{m+1}{3}+c(3,3)\binom{m+1}{4}$$

$$=\binom{m+1}{2}+2[c(2,\ 1)+c(2,2)]\binom{m+1}{3}+6\binom{m+1}{4}$$

$$=\binom{m+1}{2}+2(1+2)\binom{m+1}{3}+6\binom{m+1}{4}$$

$$=\binom{m+1}{2}+6\binom{m+1}{3}+6\binom{m+1}{4} \tag{41}$$

在(38)式中取$n=4$，并由(30)，(31)，(41)式我们有

$$\sum_{k=1}^{m} k^4 = c(4,1)\binom{m+1}{2} + c(4,2)\binom{m+1}{3} + c(4,3)\binom{m+1}{4}$$

$$+c(4,4)\binom{m+1}{5}$$

$$=\binom{m+1}{2} + 2[c(3,1)+c(3,2)]\binom{m+1}{3} + 3[c(3,2)$$

$$+c(3,3)]\binom{m+1}{4} + 4!\binom{m+1}{5}$$

$$=\binom{m+1}{2} + 2(1+6)\binom{m+1}{3} + 3(6+6)\binom{m+1}{4}$$

$$+24\binom{m+1}{5}$$

$$=\binom{m+1}{2} + 14\binom{m+1}{3} + 36\binom{m+1}{4} + 24\binom{m+1}{5} \qquad (42)$$

在(38)式中取$n=5$，并由(30)，(31)，(42)式我们有

$$\sum_{k=1}^{m} k^5 = c(5,1)\binom{m+1}{2} + c(5,2)\binom{m+1}{3} + c(5,3)\binom{m+1}{4}$$

$$+c(5,4)\binom{m+1}{5} + c(5,5)\binom{m+1}{6}$$

$$=\binom{m+1}{2} + 2[c(4,1)+c(4,2)]\binom{m+1}{3} + 3[c(4,2)$$

$$+c(4,3)]\binom{m+1}{4} + 4[c(4,3)+c(4,4)]\binom{m+1}{5}$$

$$+5!\binom{m+1}{6}$$

$$=\binom{m+1}{2}+2(1+14)\binom{m+1}{3}+3(14+36)\binom{m+1}{4}$$

$$+4(36+24)\binom{m+1}{5}+5\times 24\binom{m+1}{6}$$

$$=\binom{m+1}{2}+30\binom{m+1}{3}+150\binom{m+1}{4}+240\binom{m+1}{5}$$

$$+120\binom{m+1}{6} \tag{43}$$

在(38)式中取$n=6$，并由(30)，(31)，(43)式，我们有

$$\sum_{k=1}^{m}k^6=c(6,\ 1)\binom{m+1}{2}+c(6,2)\binom{m+1}{3}+c(6,3)\binom{m+1}{4}$$

$$+c(6,4)\binom{m+1}{5}+c(6,5)\binom{m+1}{6}+c(6,6)\binom{m+1}{7}$$

$$=\binom{m+1}{2}+2[c(5,\ 1)+c(5,2)]\binom{m+1}{3}+3[c(5,\ 2)$$

$$+c(5,\ 3)]\binom{m+1}{4}+4[c(5,\ 3)+c(5,4)]\binom{m+1}{5}$$

$$+5[c(5,\ 4)+c(5,5)]\binom{m+1}{6}+6!\binom{m+1}{7}$$

$$=\binom{m+1}{2}+2(1+30)\binom{m+1}{3}+3(30+150)\binom{m+1}{4}$$

$$+4(150+240)\binom{m+1}{5}+5(240+120)\binom{m+1}{6}$$

$$+6\times 120\binom{m+1}{7}$$

$$=\binom{m+1}{2}+62\binom{m+1}{3}+540\binom{m+1}{4}+1560\binom{m+1}{5}$$

$$+1800\binom{m+1}{6}+720\binom{m+1}{7}$$

在(38)式中取$n=7$，并由(30)，(31)，(44)式，我们有

$$\sum_{k=1}^{m} k^7=c(7,1)\binom{m+1}{2}+c(7,2)\binom{m+1}{3}+c(7,3)\binom{m+1}{4}$$

$$+c(7,4)\binom{m+1}{5}+c(7,5)\binom{m+1}{6}+c(7,6)\binom{m+1}{7}$$

$$+c(7,7)\binom{m+1}{8}$$

$$=\binom{m+1}{2}+2[c(6,\ 1)+c(6,2)]\binom{m+1}{3}+3[c(6,\ 2)$$

$$+c(6,\ 3)]\binom{m+1}{4}+4[c(6,\ 3)+c(6,4)]\binom{m+1}{5}$$

$$+5[c(6,\ 4)+c(6,5)]\binom{m+1}{6}+6[c(6,\ 5)$$

$$+c(6,\ 6)]\binom{m+1}{7}+7!\binom{m+1}{8}$$

$$=\binom{m+1}{2}+2(1+62)\binom{m+1}{3}+3(62+540)\binom{m+1}{4}$$

$$+4(540+1560)\binom{m+1}{5}+5(1560+1800)\binom{m+1}{6}$$

$$+6(1800+720)\binom{m+1}{7}+7\times720\binom{m+1}{8}$$

$$=\binom{m+1}{2}+126\binom{m+1}{3}+1806\binom{m+1}{4}+8400\binom{m+1}{5}$$

$$+16800\binom{m+1}{6}+15120\binom{m+1}{7}+5040\binom{m+1}{8}\quad(45)$$

在(38)式中取$n=8$，并由(30)，(31)，(45)式，我们有

$$\sum_{k=1}^{m} k^8 = c(8,1)\binom{m+1}{2} + c(8,2)\binom{m+1}{3} + c(8,3)\binom{m+1}{4}$$

$$+c(8,4)\binom{m+1}{5} + c(8,5)\binom{m+1}{6} + c(8,6)\binom{m+1}{7}$$

$$+c(8,7)\binom{m+1}{8} + c(8,8)\binom{m+1}{9}$$

$$=\binom{m+1}{2} + 2[c(7,1)+c(7,2)]\binom{m+1}{3} + 3[c(7,2)$$

$$+c(7,3)]\binom{m+1}{4} + 4[c(7,3)+c(7,4)]\binom{m+1}{5}$$

$$+5[c(7,4)+c(7,5)]\binom{m+1}{6} + 6[c(7,5)$$

$$+c(7,6)]\binom{m+1}{7} + 7[c(7,6)+c(7,7)]\binom{m+1}{8}$$

$$+8!\binom{m+1}{9}$$

$$=\binom{m+1}{2} + 2(1+126)\binom{m+1}{3} + 3(126+1806)\binom{m+1}{4}$$

$$+4(1806+8400)\binom{m+1}{5} + 5(8400+16800)\binom{m+1}{6}$$

$$+6(16800+15120)\binom{m+1}{7} + 7(15120$$

$$+5040)\binom{m+1}{8} + 8\times 5040\binom{m+1}{9}$$

$$=\binom{m+1}{2} + 254\binom{m+1}{3} + 5796\binom{m+1}{4} + 40824\binom{m+1}{5}$$

$$+126000\binom{m+1}{6}+191520\binom{m+1}{7}+141120\binom{m+1}{8}$$

$$+40320\binom{m+1}{9} \tag{46}$$

在(38)式中取$n=9$，并由(30)，(31)，(46)式我们有

$$\sum_{k=1}^{m} k^9=c(9,1)\binom{m+1}{2}+c(9,2)\binom{m+1}{3}+c(9,3)\binom{m+1}{4}$$

$$+c(9,4)\binom{m+1}{5}+c(9,5)\binom{m+1}{6}+c(9,6)\binom{m+1}{7}$$

$$+c(9,7)\binom{m+1}{8}+c(9,8)\binom{m+1}{9}+c(9,9)\binom{m+1}{10}$$

$$=\binom{m+1}{2}+2[c(8,1)+c(8,2)]\binom{m+1}{3}+3[c(8,2)$$

$$+c(8,3)]\binom{m+1}{4}+4[c(8,3)+c(8,4)]\binom{m+1}{5}$$

$$+5[c(8,4)+c(8,5)]\binom{m+1}{6}+6[c(8,5)$$

$$+c(8,6)]\binom{m+1}{7}+7[c(8,6)+c(8,7)]\binom{m+1}{8}$$

$$+8[c(8,7)+c(8,8)]\binom{m+1}{9}+9!\binom{m+1}{10}$$

$$=\binom{m+1}{2}+2(1+254)\binom{m+1}{3}+3(254+5796)\binom{m+1}{4}$$

$$+4(5796+40824)\binom{m+1}{5}+5(40824$$

$$+126000)\binom{m+1}{6}+6(126000+191520)\binom{m+1}{7}$$

$$+7(191520+141120)\binom{m+1}{8}+8(141120$$

$$+40320)\binom{m+1}{9}+9\times 40320\binom{m+1}{10}$$

$$=\binom{m+1}{2}+510\binom{m+1}{3}+18150\binom{m+1}{4}+186480\binom{m+1}{5}$$

$$+834120\binom{m+1}{6}+1905120\binom{m+1}{7}+2328480\binom{m+1}{8}$$

$$+1451520\binom{m+1}{9}+362880\binom{m+1}{10} \qquad (47)$$

在(38)式中取$n=10$，并由(30)、(31)，(47)式，我们有

$$\sum_{k=1}^{m} k^{10}=c(10,\ 1)\binom{m+1}{2}+c(10,2)\binom{m+1}{3}$$

$$+c(10,\ 3)\binom{m+1}{4}+c(10,\ 4)\binom{m+1}{5}$$

$$+c(10,\ 5)\binom{m+1}{6}+c(10,\ 6)\binom{m+1}{7}$$

$$+c(10,\ 7)\binom{m+1}{8}+c(10,\ 8)\binom{m+1}{9}$$

$$+c(10,\ 9)\binom{m+1}{10}+c(10,\ 10)\binom{m+1}{11}$$

$$=\binom{m+1}{2}+2[c(9,\ 1)+c(9,2)]\binom{m+1}{3}+3[c(9,\ 2)$$

$$+c(9,\ 3)]\binom{m+1}{4}+4[c(9,\ 3)+c(9,4)]\binom{m+1}{5}$$

$$+5[c(9,\ 4)+c(9,5)]\binom{m+1}{6}+6[c(9,\ 5)$$

$$+c(9,\ 6)]\binom{m+1}{7}+7[c(9,6)+c(9,7)]\binom{m+1}{8}$$

$$+8[c(9,\ 7)+c(9,8)]\binom{m+1}{9}+9[c(9,\ 8)$$

$$+c(9,\ 9)]\binom{m+1}{10}+10!\binom{m+1}{11}$$

$$=\binom{m+1}{2}+2(1+510)\binom{m+1}{3}+3(510+18150)\binom{m+1}{4}$$

$$+4(18150+186480)\binom{m+1}{5}+5(186480$$

$$+834120)\binom{m+1}{6}+6(834120+1905120)\binom{m+1}{7}$$

$$+7(1905120+2328480)\binom{m+1}{8}+8(2328480$$

$$+1451520)\binom{m+1}{9}+9(1451520+362880)\binom{m+1}{10}$$

$$+10\times 362880\binom{m+1}{11}$$

$$=\binom{m+1}{2}+1022\binom{m+1}{3}+55980\binom{m+1}{4}+818520\binom{m+1}{5}$$

$$+5103000\binom{m+1}{6}+16435440\binom{m+1}{7}+29635200\binom{m+1}{8}$$

$$+30240000\binom{m+1}{9}+16329600\binom{m+1}{10}$$

$$+3628800\binom{m+1}{11} \tag{48}$$

习题

1. 当$n\geqslant1$和$m\geqslant1$时，令$\bar{n}=n(n+1)$而$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n}k^m$，又令

$$f_3(x)=1,\quad f_5(x)=\frac{2x-1}{3},\quad f_7(x)=\frac{3x^2-4x+2}{6}$$

$$f_9(x)=\frac{2x^3-5x^2+6x-3}{5},$$

$$f_{11}(x)=\frac{2x^4-8x^3+17x^2-20x+10}{6} \tag{49}$$

则当$1\leqslant l\leqslant5$时我们有

$$S_{2l+1}(n)=\frac{\bar{n}^2f_{2l+1}(\bar{n})}{4}$$

2. 当$n\geqslant1$和$m\geqslant1$时，令$\bar{n}=n(n+1)$而$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n}k^m$，又令

$$f_2(x)=1,\ f_4(x)=\frac{3x-1}{5},\ f_6(x)=\frac{3x^2-3x+1}{7}$$

$$f_8(x)=\frac{5x^3-10x^2+9x-3}{15}, \tag{50}$$

$$f_{10}(x)=\frac{3x^4-10x^3+17x^2-15x+5}{11}$$

则当 $1\leqslant l\leqslant5$ 时我们有

$$S_{2l}(n)=\frac{(2n+1)\bar{n}f_{2l}(\bar{n})}{6}$$

3. 当$n\geqslant 1$时，令$\bar{n}=n(n+1)$而$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n}k^m$，又令

$$f_{13}(x)=\frac{30x^5-175x^4+574x^3-1180x^2+1382x-691}{105}$$

$$f_{15}(x)=\frac{3x^6-24x^5+112x^4-352x^3+718x^2-840x+420}{12} \quad (51)$$

则当 $6\leqslant l\leqslant 7$ 时我们有

$$S_{2l+1}(n)=\frac{\bar{n}^2 f_{2l+1}(\bar{n})}{4}$$

4. 当$n\geqslant 1$时，令$\bar{n}=n(n+1)$. 而$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n}k^m$又令

$$f_{12}(x)=\frac{105x^5-525x^4+1435x^3-2360x^2+2073x-691}{455} \quad (52)$$

$$f_{14}(x)=\frac{3x^6-21x^5+84x^4-220x^3+359x^2-315x+105}{15}$$

则当 $6\leqslant l\leqslant 7$ 时我们有

$$S_{2l}(n)=\frac{(2n+1)\bar{n}^1 f_{2l}(\bar{n})}{6}$$

5. 当$n\geqslant 1$时，令$\bar{n}=n(n+1)$　而$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n}k^m$ 又令

$$f_{16}(x)=\frac{1}{85}(15x^7-140x^6+770x^5-2930x^4+7595x^3$$
$$-12370x^2+10851x-3617) \quad (53)$$

则当$m=16$时我们有

$$S_{16}(n)=\frac{(2n+1)\bar{n}f_{16}(\bar{n})}{6}$$

6. 当$n\geqslant 1$时，令$\bar{n}=n(n+1)$ 而$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n}k^m$ 又令

$$f_{17}(x)=\frac{1}{45}(10x^7-105x^6+660x^5-2930x^4+9114x^3$$

$$-18555x^2+21702x-10851) \qquad (54)$$

则当$n=17$时我们有

$$S_{17}(n)=\frac{\bar{n}^2f_{17}(\bar{n})}{4}.$$

习题解答

第一章

1. 证明：我们将使用反证法来证明本习题。

假设存在有二阶魔术方阵，设其如下图

a_1	a_2
a_3	a_4

则由二阶魔术方阵的定义，a_1、a_2，a_3，a_4应该满足下面的条件：$1 \leqslant a_i \leqslant 4$（其中$i=1$，2，3，4），且当$i \neq j$时$a_i \neq a_j$（其中$i$，$j=1$，2，3，4），又应有

$$a_1 + a_2 = a_3 + a_4 \qquad (1)$$

$$a_1 + a_3 = a_2 + a_4 \qquad (2)$$

将(1)式的两边分别减去(2)式的两边，我们有

$$a_2 - a_3 = a_3 - a_2$$

即是

$$a_2 = a_3$$

这与$a_2 \neq a_3$发生矛盾，故不存在有二阶魔术方阵。因而本习题得证。

2.证明：由三阶魔术方阵的定义，这九个数是1,2，3，…，9　其和为$1+2+3+\cdots+9=\frac{9(9+1)}{2}=45$。将1，2，3，…，9这九个数排成三行，每行三个数，但每行中的三个数的和一定都是相等的，所以每行中的三个数的和为$\frac{45}{3}=15$。

我们首先看一下1和9能不能放在方阵的中间。若把1居中，剩下来的八个数都在1的周围，则2一定与1处于同一行（或同一列或同一条对角线）里，但$1+2=3$，因而与它们处于同一行（或同一列或同一条对角线）的另一个数应为$15-3=12$，而三阶魔术方阵中没有12这个数，所以1不能居中。又若把9居中，则剩下来的八个数应置于它的周围，则8一定要与9处于同一行（或同一列或同一条对角线）里，但$8+9=17$，这已经超过15，因而9也不能居中。

现在我们设a居中（其中$2 \leqslant a \leqslant 8$），则剩下来的八个数都应在它的周围，因为$a \neq 9$，所以我们可以取出9来，9一定与$a$排在同一行（或同一列或同一条对角线），我们又设与9和a在同一行（或同一列或同一条对角线）的另一个数为b（其中$1 \leqslant b \leqslant 8$），则应有

$$15=9+a+b\geqslant 9+a+1=10+a$$

即是

$$a\leqslant 5 \tag{3}$$

另一方面，当 a 居中时，因为$a\neq 1$，所以我们又可以取出 1 来，它一定与 a 处于同一行（或同一列或同一条对角线），我们设与 1 和 a 处于同一行（或同一列或同一条对角线）的另一个数为 c（其中$2\leqslant c\leqslant 9$），则应有

$$15=1+a+c\leqslant 1+a+9=10+a$$

即是

$$a\geqslant 5 \tag{4}$$

由(3)和(4)式，我们立即得到$a=5$。故本习题得证。

3.解：我们设四阶魔术方阵为

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

由四阶魔术方阵的定义，应该有$1\leqslant a_{ij}\leqslant 16$（其中$i$，$j=1$，2，3，4），并且每一行（或每一列或每一条对角线）上的四个数的和为

$$\frac{1+2+3+\cdots+16}{4}=\frac{\frac{16(16+1)}{2}}{4}=\frac{16\times 17}{8}=34$$

现在我们假设存在有本习题所给出的形式的四阶魔术方阵，即若有$a_{11}=2$，$a_{12}=3$，$a_{21}=4$，则我们有

$$2+3+a_{13}+a_{14}=34$$

和

$$2+4+a_{31}+a_{41}=34$$

即是

$$a_{13}+a_{14}=29 \quad (5)$$

$$a_{31}+a_{41}=28 \quad (6)$$

在1到16这十六个数中，两数（其中这两数是不同的）之和等于29的有

(i) 13+16或14+15

在1到16这十六个数中，两数（其中这两数是不同的）之和等于28的有

(ii) 12+16 或 13+15

但a_{13}，a_{14}，a_{31}，a_{41}这四个数两两都不相等，因而在(i)式中出现了的数不能在(ii)式中也出现，否则例如a_{13}，a_{14}取13和16，而a_{31}和a_{41}取12和16，则出现$a_{14}=16=a_{41}$，这与$a_{14}\neq a_{41}$矛盾。因此a_{13}，a_{14}，a_{31}，a_{41}取数的可能只有a_{13}和a_{14}取14和15（或15和14），a_{31}和a_{41}取12和16（或16和12）。

由于2，3，4，14，15，12，16都被取为a_{11}，a_{12}，a_{21}和a_{13}，a_{14}，a_{31}，a_{41}，因而从1到16这十六个数中只剩下1，5，6，7，8，9，10，11，13这九个数了，其中最大的两个数之和为11+13=24。

现在我们来证明a_{23}和a_{32}都不能够取为1。否则，若a_{23}取为1，则有

$$a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}=4+a_{22}+1+a_{24}$$

$$=5+a_{22}+a_{24}=34$$

即

$$a_{22}+a_{24}=34-5=29$$

这与剩下的数中，最大的两个数之和为24矛盾，所以a_{23}不能取1。又若a_{32}取为1，则有

$$a_{12}+a_{22}+a_{32}+a_{42}=3+a_{22}+1+a_{42}$$
$$=4+a_{22}+a_{42}=34$$

即

$$a_{22}+a_{42}=34-4=30$$

这也与剩下的数中最大两个数的和为24矛盾，所以a_{32}也不能取为1。因而a_{23}和a_{32}只能取5，6，7，8，9，10，11，13这八个数中的两个数，故有

$$a_{23}+a_{32}\geqslant 5+6=11$$

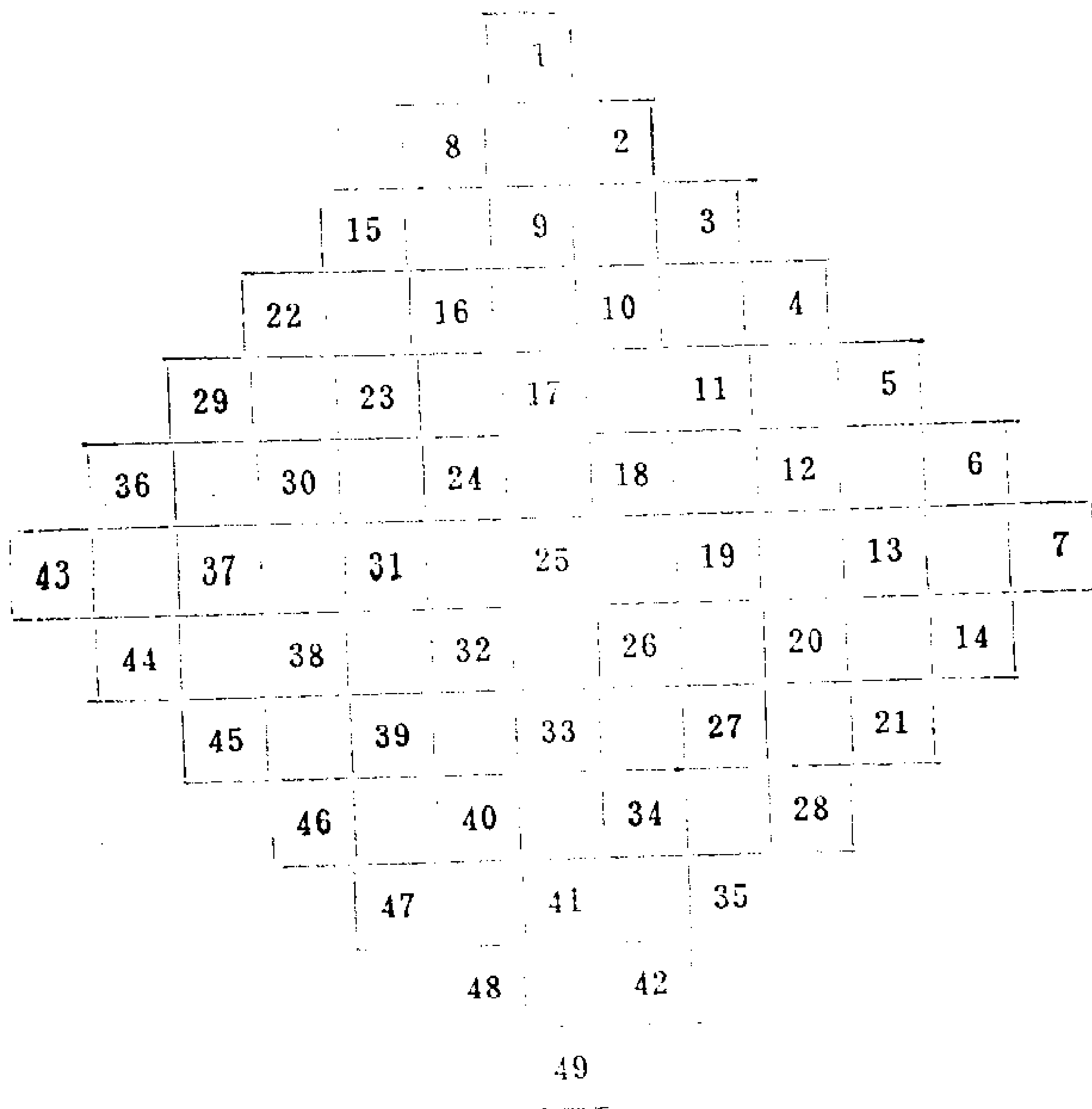
又由于$a_{41}\geqslant 14$，$a_{14}\geqslant 12$，$a_{23}+a_{32}\geqslant 11$，所以我们有

$$a_{41}+a_{32}+a_{23}+a_{14}\geqslant 14+11+12=37$$

这与四阶魔术方阵的对角线上的四个数之和应为34发生矛盾，所以不存在有本习题中给出的形式的四阶魔术方阵。本习题解完。

4.解：我们在四十九个小方格的上面写上从1开始到49，然后我们根据杨辉的"九子斜排"改成"四十九子斜排"，就得到图(1)

在图(1)中居上的有1，8，2，15，9，3，居下的有47，41，35，48，42，49。然后再根据杨辉的"上下对易"，把1调到33的上面，把8调到40的上面，把2调到34的上面，把15



图（1）

调到47的上面，把 9 调到41的上面，把 3 调到35的上面，就得到图(2)。

然后再把图(2)中居下的调到上面去，把47调到 23 的上面，把41调到17的上面，把35调到11的上面，把48调 到 24 的 上面，把42调到18的上面，把49调到25的上面，这样就得到图(3)。

最后我们来进行"左右相更"，居左的有29，36，43，37，44，45，居右的有5，6，7，13，14，21。现 在我们把居左

22 16 10 4

29 23 17 11 5

36 30 24 18 12 6

43 37 31 25 19 13 7

44 38 32 1 26 20 14

45 39 8 33 2 27 21

46 15 40 9 34 3 28

47 41 35

48 42

49

图（2）

22 47 16 41 10 35 4

29 23 48 17 42 11 5

36 30 24 49 18 12 6

43 37 31 25 19 13 7

44 38 32 1 26 20 14

45 39 8 33 2 27 21

46 15 40 9 34 3 28

图（3）

的29调到11的右边去，把36调到18的右边去，把43调到25的右边去，把37调到19的右边，把44调到26的右边，把45调到27的右边，这样就得到图(4)。

22	47	16	41	10	35	4			
	23	48	17	42	11	29	5		
30		24	49	18	36	12		6	
	31		25	43	19	37	13		7
38		32	1	26	44	20		14	
	39	8	33	2	27	45	21		
46	15	40	9	34	3	28			

图（4）

然后再把图(4)中居右的调到左边去，把 5 调到 23 的左边，把 6 调到24的左边，把 7 调到25的左边，把13调到31的左边去，把14调到32的左边去，把21调到39的左边去，这样就得到图(5)。

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

图（5）

在图(5)中，由于

$$22+47+16+41+10+35+4=175$$

$5+23+48+17+42+11+29=175$

$30+6+24+49+18+36+12=175$

$13+31+7+25+43+19+37=175$

$38+14+32+1+26+44+20=175$

$21+39+8+33+2+27+45=175$

$46+15+40+9+34+3+28=175$

$22+5+30+13+38+21+46=175$

$47+23+6+31+14+39+15=175$

$16+48+24+7+32+8+40=175$

$41+17+49+25+1+33+9=175$

$10+42+18+43+26+2+34=175$

$35+11+36+19+44+27+3=175$

$4+29+12+37+20+45+28=175$

$22+23+24+25+26+27+28=175$

$4+11+18+25+32+39+46=175$

所以图(5)就是一个七阶的魔术方阵。

5.证明：

由于

$64+2+3+61+60+6+7+57=260$

$9+55+54+12+13+51+50+16=260$

$17+47+46+20+21+43+42+24=260$

$40+26+27+37+36+30+31+33=260$

$32+34+35+29+28+38+39+25=260$

$41+23+22+44+45+19+18+48=260$

$49+15+14+52+53+11+10+56=260$

$8+58+59+5+4+62+63+1=260$

$64+9+17+40+32+41+49+8=260$

$2+55+47+26+34+23+15+58=260$

$3+54+46+27+35+22+14+59=260$

$61+12+20+37+29+44+52+5=260$

$60+13+21+36+28+45+53+4=260$

$6+51+43+30+38+19+11+62=260$

$7+50+42+31+39+18+10+63=260$

$57+16+24+33+25+48+56+1=260$

$64+55+46+37+28+19+10+1=260$

$57+50+43+36+29+22+15+8=260$

所以本习题中给出的图是一个八阶魔术方阵。

6.证明:

由于

$47+58+69+80+1+12+23+34+45=369$

$57+68+79+9+11+22+33+44+46=369$

$67+78+8+10+21+32+43+54+56=369$

$77+7+18+20+31+42+53+55+66=369$

$6+17+19+30+41+52+63+65+76=369$

$16+27+29+40+51+62+64+75+5=369$

$26+28+39+50+61+72+74+4+15=369$

$36+38+49+60+71+73+3+14+25=369$

$37+48+59+70+81+2+13+24+35=369$

$47+57+67+77+6+16+26+36+37=369$

$58+68+78+7+17+27+28+38+48=369$

$69+79+8+18+19+29+39+49+59=369$

$80+9+10+20+30+40+50+60+70=369$

$1+11+21+31+41+51+61+71+81=369$

$12+22+32+42+52+62+72+73+2=369$

$23+33+43+53+63+64+74+3+13=369$

$34+44+54+55+65+75+4+14+24=369$

$45+46+56+66+76+5+15+25+35=369$

$47+68+8+20+41+62+74+14+35=369$

$45+44+43+42+41+40+39+38+37=369$

所以本习题给出的图是一个九阶魔术方阵。

7：验证方法与第 6 题一样。

8：验证方法与第 6 题一样。

9：证明：由于$F_1=F_2=1$和$F_4=3$，我们有$F_1+F_2=1+1=F_4-1=F_{2+2}-1$，故当$n=2$时(i)式成立。现在我们假设当$n=k$（其中$k\geqslant 2$）时，(i)式成立，即有

$$F_1+F_2+\cdots+F_k=F_{k+2}-1$$

而来证明当$n=k+1$时(i)式也成立。由本章书中的(3)式，我们有

$$F_1+F_2+\cdots+F_k+F_{k+1}=F_{k+2}-1+F_{k+1}$$
$$=F_{k+1}+F_{k+2}-1=F_{k+3}-1=F_{k+1+2}-1$$

故当$n=k+1$时(i)式也成立，而由数学归纳法知道(i)式成立。

由于$F_1=1$，$F_3=2$和$F_4=3$，我们有

$$F_1+F_3=1+2=3=F_4$$

故当$n=2$时，(ii)式成立。

现在我们假设当$n=k$（其中$k\geqslant 2$）时(ii)式成立，即有

$$F_1+F_3+\cdots+F_{2k-1}=F_{2k}$$

而来证明当$n=k+1$时，(ii)式也成立。

由本章书中的(3)式 我们有

$$\begin{aligned}&F_1+F_3+\cdots+F_{2k-1}+F_{2(k+1)-1}\\&=F_1+F_3+\cdots+F_{2k-1}+F_{2k+1}=F_{2k}+F_{2k+1}\\&=F_{2k+2}=F_{2(k+1)}\end{aligned}$$

故当$n=k-1$时(ii)式也成立，而由数学归纳法知道(ii)式成立。故本习题得证。

10. 证明：当$n\geqslant 2$时，由本章习题 9 的(i)式我们有

$$F_1+F_2+\cdots+F_{2n}=F_{2n+2}-1 \tag{7}$$

将(7)式的两边分别减去本章习题 9 (ii)式的两边后，再使用本章书中的(3)式就得到

$$F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F_{2n+2}-F_{2n}-1=F_{2n+1}-1$$

故(i)式得证。

将本章习题 9 中(ii)式的两边分别减去本题中的 (i) 式的两边后再使用本章书中的(3)式就得到

$$\begin{aligned}&F_1-F_2+F_3-F_4+\cdots+F_{2n-1}-F_{2n}\\&=F_{2n}-F_{2n+1}+1=-F_{2n-1}+1\end{aligned} \tag{8}$$

在(8)式的两边都加上 F_{2n+1} 后再使用本章书中的 (3) 式就得到

$$F_1-F_2+F_3-F_4+\cdots+F_{2n-1}-F_{2n}+F_{2n+1}$$

$$=F_{2n+1}-F_{2n-1}+1=F_{2n}+1 \tag{9}$$

当$m\geqslant4$及m是偶数时则在(8)式中取$n=\frac{m}{2}$就能够知道(ii)式成立，而当$m\geqslant4$及m是奇数时，则在(9)式中取$n=\frac{m-1}{2}$就能够知道(ii)式也成立。因而本习题得证。

11. 证明：由于$F_1=F_2=1$和$F_3=2$，我们有

$$F_1^2+F_2^2=1+1=2=F_2F_3$$

故当$n=2$时，本习题成立。

现设当$n=k$（其中$k\geqslant2$）时，本习题成立。即有

$$F_1^2+F_2^2+\cdots+F_k^2=F_kF_{k+1}$$

而来证明当$n=k+1$时本习题也成立。

由本章书中的(3)式，我们有

$$F_1^2+F_2^2+\cdots+F^2_k+F^2_{k+1}=F_kF_{k+1}+F^2_{k+1}$$

$$=(F_{k+1})(F_k+F_{k+1})=F_{k+1}F_{k+2}$$

故当$n=k+1$时，本习题也成立。因而由数学归纳法知道本习题得证。

12. 证明：我们将对m使用数学归纳法来证明本习题成立。由于$F_1=F_2=1$和本章书中的(3)式，我们有

$$F_{n-1}F_1+F_nF_2=F_{n-1}+F_n=F_{n+1}$$

故当$m=1$时本习题成立。由于$F_2=1$，$F_3=2$和本章书中的(3)式，我们有

$$F_{n-1}F_2+F_nF_3=F_{n-1}+2F_n=F_n+F_{n-1}+F_n$$

$$=F_{n+1}+F_n=F_{n+2}$$

故当$m=2$时本习题也成立。

现在我们假设当$m=k-1$和$m=k$（其中$k\geqslant 2$）时本习题都成立，即有

$$F_{n+k-1}=F_{n-1}F_{k-1}+F_nF_k$$

和

$$F_{n+k}=F_{n-1}F_k+F_nF_{k+1}$$

由本章书中的(3)式及将上面的两个式子的两边分别加起来，我们就可以得到

$$\begin{aligned}F_{n+k+1}&=F_{n+k-1}+F_{n+k}\\&=F_{n-1}F_{k-1}+F_nF_k+F_{n-1}F_k+F_nF_{k+1}\\&=(F_{n-1})(F_{k-1}+F_k)+(F_n)(F_k+F_{k+1})\\&=F_{n-1}F_{k+1}+F_nF_{k+2}\end{aligned}$$

故当$m=k+1$时，本习题也成立。因而本习题得证。

13.证明：在本章习题12中取$m=n-1$则我们有

$$F_{2n-1}=F_{n+(n-1)}=F^2_{n-1}+F_n^2$$

故(i)式成立。在本章习题12中取$m=n$，再使用本章书中的(3)式，则我们有

$$\begin{aligned}F_{2n}&=F_{n-1}F_n+F_nF_{n+1}\\&=(F_n)(F_{n+1}+F_{n-1})\\&=(F_{n+1}-F_{n-1})(F_{n+1}+F_{n-1})\\&=F^2_{n+1}-F^2_{n-1}\end{aligned}$$

故(ii)式成立。由(i)式和本章习题11，我们有

$$\begin{aligned}F_{2n-1}&=F^2_{n-1}+F_n^2\\&=F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2-F_1^2-F_2^2-\cdots-F^2_{n-2}\end{aligned}$$

$$=F_nF_{n+1}-F_{n-2}F_{n-1}$$

故(iii)式成立。在本章习题12中取$m=2n$得到

$$F_{3n}=F_{n-1}F_{2n}+F_nF_{2n-1}$$
$$=F_{n-1}F_{2n}+F_nF_{2(n+1)-1}$$

故由(i)，(ii)和本章书中的(3)式，我们有

$$F_{3n}=(F_{n-1})(F^2_{n+1}-F^2_{n-1})+(F_n)(F_n^2+F^2_{n+1})$$
$$=F_n^3-F^3_{n-1}+(F^2_{n+1})(F_n+F_{n-1})$$
$$=F^3_{n+1}+F_n^3-F^3_{n-1}$$

故(iv)式也成立。因而本习题得证。

14.证明：我们将使用数学归纳法来证明(i)式成立。由于

$$F^2_{1+1}-F_1F_{1+2}=F_2^2-F_1F_3=1-2=(-1)^1$$

故当$n=1$时(i)式成立。

现在我们假设当$n=k$（其中$k\geq1$）时，(i)式成立，即有

$$F^2_{k+1}-F_kF_{k+2}=(-1)^k$$

由本章书中的(3)式和上式我们有

$$F^2_{k+2}-F_{k+1}F_{k+3}$$
$$=(F_{k+2})(F_k+F_{k+1})-(F_{k+1})(F_{k+1}+F_{k+2})$$
$$=-F^2_{k+1}+F_kF_{k+2}$$
$$=(-1)^{k+1}$$

故(i)式当$n=k+1$时也成立，而由数学归纳法知道(i)式成立。

由于$F_1=F_2=1$，$F_3=2$，$F_4=3$知道当$n=1$和$n=2$时

(ii)式都成立。

现在我们假设当$n=k$（其中$k\geqslant 2$）时，(ii)式成立，即有

$$F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\cdots+F_{2k-1}F_{2k}=F^2_{2k}$$

由上式和本章书中的(3)式，我们有

$$\begin{aligned}&F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\cdots+F_{2k-1}F_{2k}+F_{2k}F_{2k+1}\\&\quad+F_{2k+1}F_{2k+2}\\&=F^2_{2k}+F_{2k}F_{2k+1}+F_{2k+1}F_{2k+2}\\&=F_{2k}(F_{2k}+F_{2k+1})+F_{2k+1}F_{2k+2}\\&=F_{2k}F_{2k+2}+F_{2k+1}F_{2k+2}\\&=(F_{2k}+F_{2k+1})(F_{2k+2})\\&=F^2_{2(k+1)}\end{aligned}$$

故当$n=k+1$时(ii)式也成立，因而由数学归纳法知道(ii)式成立。所以本习题得证。

15.证明：由于$F_1=F_2=1$，$F_3=2$，$F_4=3$，$F_5=5$，知道当$n=1$和$n=2$时，(i)式成立。现在我们假设当$n=k$（其中$k\geqslant 2$）时(i)式成立，即有

$$F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\cdots+F_{2k}F_{2k+1}=F^2_{2k+1}-1$$

由上式和本章书中的(3)式，我们有

$$\begin{aligned}&F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\cdots+F_{2k}F_{2k+1}+F_{2k+1}F_{2k+2}\\&\quad+F_{2(k+1)}F_{2(k+1)+1}\\&=F^2_{2k+1}-1+F_{2k+1}F_{2k+2}+F_{2k+2}F_{2k+3}\\&=(F_{2k+1})(F_{2k+1}+F_{2k+2})+F_{2k+2}F_{2k+3}-1\\&=F_{2k+1}F_{2k+3}+F_{2k+2}F_{2k+3}-1\end{aligned}$$

$$=(F_{2k+3})(F_{2k+1}+F_{2k+2})-1$$

$$=F^2_{2(k+1)+1}-1$$

故当$n=k+1$时，(i)式也成立。因而由数学归纳法知道(i)式成立。

由于$F_1=F_2=1$，$F_3=2$，$F_4=3$，$F_5=5$，$F_6=8$知道当$n=1$和$n=2$时(ii)式都成立。现在我们假设当$n=k$（其中$k\geqslant2$）时(ii)式成立，即有

$$kF_1+(k-1)F_2+\cdots+2F_{k-1}+F_k=F_{k+4}-(k+3)$$

由上式和本章习题9中的(i)式．我们有

$$(k+1)F_1+kF_2+\cdots+3F_{k-1}+2F_k+F_{k+1}$$

$$=kF_1+(k-1)F_2+\cdots+2F_{k-1}+F_k+F_1+F_2$$

$$+\cdots+F_{k+1}$$

$$=F_{k+4}-(k+3)+F_{k+3}-1$$

$$=F_{k+3}+F_{k+4}-(k+4)$$

$$=F_{k+1+4}-(k+4)$$

故当$n=k+1$时(ii)式也成立．因而由数学归纳法知道(ii)式成立。

当$m=1$时，显见(iii)式成立。现在我们假设当$m=k$（其中$k\geqslant1$）时(iii)式成立，即有

$$F_{nk}\geqslant F_n{}^k$$

由本章习题12和上式我们有

$$F_{n(k+1)}=F_{nk+n}\geqslant F_{nk}F_{n+1}\geqslant F_{nk}F_n\geqslant F_n{}^{k+1}$$

故当$m=k+1$时，(iii)也成立．因而由数学归纳法知道(iii)式成立。所以本习题得证。

16. 证明：由于$L_1=1$，$L_2=3$，$F_0=0$，$F_1=F_2=1$，$F_3=2$知道当$n=1$和$n=2$时(i)式都成立。现在我们假设当$n=k-1$和$n=k$（其中$k\geqslant 2$）时(i)式都成立，即有

$$L_{k-1}=F_{k-2}+F_k$$

$$L_k=F_{k-1}+F_{k+1}$$

当$k\geqslant 2$时有$L_{k+1}=L_k+L_{k-1}$，故由上面两个式子和本章书中的(3)式，我们有

$$\begin{aligned}L_{k+1}&=L_k+L_{k-1}\\&=F_{k-1}+F_{k+1}+F_{k-2}+F_k\\&=F_{k-2}+F_{k-1}+F_k+F_{k+1}\\&=F_k+F_{k+2}\end{aligned}$$

因而当$n=k+1$时(i)式也成立，故由数学归纳法知道(i)式成立。

由本章习题13中的(ii)式及本题的(i)式和本章书中的(3)式我们有

$$\begin{aligned}F_{2n}&=F^2_{n+1}-F^2_{n-1}\\&=(F_{n+1}-F_{n-1})(F_{n+1}+F_{n-1})\\&=L_n(F_{n+1}-F_{n-1})=L_nF_n\end{aligned}$$

故(ii)式成立。

由于$F_3=2$，$F_5=5$，$F_6=8$，$F_8=21$，故当$n=1$和$n=2$时，(iii)式成立。现在我们假设当$n=k$(其中$k\geqslant 1$)时(iii)式成立，即有

$$F_3+F_6+F_9+\cdots+F_{3k}=\frac{F_{3k+2}-1}{2} \qquad (10)$$

又当$k\geqslant 1$时则由本章书中的(3)式我们有

$$
\begin{aligned}
F_{3(k+1)+2}=F_{3k+5} &\\
&=F_{3k+3}+F_{3k+4}\\
&=F_{3k+3}+F_{3k+2}+F_{3k+3}\\
&=F_{3k+2}+2F_{3k+3} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

由(10)和(11)式，我们有

$$
F_3+F_6+F_9+\cdots+F_{3(k+1)}
$$

$$
=\frac{F_{3k+2}-1}{2}+F_{3k+3}
$$

$$
=\frac{2F_{3k+3}+F_{3k+2}-1}{2}
$$

$$
=\frac{F_{3(k+1)+2}-1}{2}
$$

即(iii)式当$n=k+1$时也成立，故由数学归纳法知道(iii)式成立。因而本习题得证。

17.(i)：证明：当$n=1$时，由于$1\cdot 2=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3$故当$n=1$时(i)式成立。

现在我们假设当$n=k-1$（其中$k\geqslant 2$）时(i)式成立，即假定

$$
1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(k-1)k=\frac{1}{3}(k-1)\cdot k\cdot(k+1)
$$

则当$n=k$时，由归纳法的假定有

$$
1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(k-1)\cdot k+k(k+1)
$$

$$=\frac{1}{3}(k-1)\cdot k\cdot(k+1)+k(k+1)$$

$$=k(k+1)\left[\frac{1}{3}(k-1)+1\right]$$

$$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

即当$n=k$时(i)式也成立。故由数学归纳法知道(i)式对任意的正整数n都成立。

(ii) 证明：设$f(n)=a^{n+2}+(a+1)^{2n+1}$。当$n=0$时，$f(0)=a^2+a+1$。故当$n=0$时，命题(ii)成立。

假定命题(ii)对于$n=k-1$成立，即假定

$$(a^2+a+1)\mid f(k-1)$$

则当$n=k$时

$$\begin{aligned}f(k)&=a^{k+2}+(a+1)^{2k+1}\\&=a\cdot a^{k+1}+(a+1)^2\cdot(a+1)^{2k-1}\\&=a\cdot a^{k+1}+(a^2+a+1)\cdot(a+1)^{2k-1}+a(a+1)^{2k-1}\\&=a[a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}]+(a^2+a+1)(a+1)^{2k-1}\\&=af(k-1)+(a^2+a+1)(a+1)^{2k-1}\end{aligned}$$

由归纳法假定，$(a^2+a+1)\mid f(k-1)$，所以由上式可知道$(a^2+a+1)\mid f(k)$，即当$n=k$时，命题(ii)也成立。故由数学归纳法知道命题(ii)对任意非负整数n成立。

(iii) 证明：当$n=1$时，由于$a_1=a_1$，故(iii)式成立。又若a_1，a_2，…，a_n中有一个等于0，(iii)式显然也成立，因此可以假设

$$0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \tag{12}$$

若$a_1 = a_n$则所有的$a_j(j=1, 2, \cdots, n)$都相等，容易验证(iii)式此时也成立。所以可以进一步假设$a_1 < a_n$。

现在我们来作归纳法假设：当$n=k-1$(其中$k\geqslant 2$)时，(iii)式成立，即假定

$$(a_1a_2\cdots a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}} \leqslant \frac{a_1+a_2\cdots+\cdots a_{k-1}}{k-1} \tag{13}$$

则当$n=k$时

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$$

$$=\frac{(k-1)\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}+a_k}{k}$$

$$=\frac{k\cdot\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}+a_k-\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}}{k}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}+\frac{a_k-\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}}{k} \tag{14}$$

由假设$a_1 < a_n$，$n=k$及(12)式可知

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1} < \frac{(k-1)a_k}{k-1} = a_k$$

所以(14)式右端两项均大于0，将(14)式两边乘方$k(k\geqslant 2)$次，并且利用不等式

$$(a+b)^k > a^k + ka^{k-1}b \quad (k\geqslant 2,\ a>0,\ b>0)$$

（这个不等式用数学归纳法很容易加以证明）得到

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^k$$

$$>\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}\right)^k+k\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1}$$

$$\cdot\left(\frac{a_k-\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}}{k}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1}\cdot a_k$$

由归纳法的假定(13)式成立可知上式右端$\geqslant a_1a_2\cdots a_k$，所以

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$$

即当$n=k$时，(iii)式也成立。故由数学归纳法知道(iii)式对任意的正整数n都成立。至此，本习题得证。

第二章

1.解：我们有

$$\binom{10}{3}=\frac{10\times9\times8}{1\times2\times3}=10\times3\times4=120$$

$$\binom{16}{2}=\frac{16\times15}{1\times2}=8\times15=120$$

$$\binom{14}{6}=\frac{14\times13\times12\times11\times10\times9}{1\times2\times3\times4\times5\times6}=7\times13\times11\times3$$

$$=3003$$

$$\binom{15}{5}=\frac{15\times14\times13\times12\times11}{1\times2\times3\times4\times5}=3\times7\times13\times11=3003$$

2.证明：我们有

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\left(\frac{n}{r}\right)\left(\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}\right)$$

$$=\frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1} \tag{1}$$

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\left(\frac{n}{n-r}\right)\left(\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}\right)$$

$$=\frac{n}{n-r}\binom{n-1}{r}$$

3.证明：我们有

$$\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

$$=\binom{2n}{n-1} \tag{2}$$

由(1)式我们有

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{2n}{(n+1)n}\binom{2n-1}{n-1}=\frac{2}{n+1}\binom{2n-1}{n-1}$$

我们又有

$$\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\binom{2n-1}{n-1}=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}$$

$$=\frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!}=\binom{2n-1}{n+1}$$

即是

$$\binom{2n-1}{n+1}=\binom{2n-1}{n-1}-\frac{2}{n+1}\binom{2n-1}{n-1}=\binom{2n-1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

因而得到

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n+1} \tag{3}$$

由(2)和(3)式，本习题得证。

4.证明：我们有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}-1\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[(1+1)^{n+1}-1\right]$$

$$=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

故(i)式得证。我们又有

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k}\binom{n+1}{k}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{k}\binom{n+1}{k}-(-1)^{k}\binom{n+1}{0}\right.$$

$$\left.-(-1)^{1}\binom{n+1}{1}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}[(1-1)^{k+1}-1+n+1]$$

$$=\frac{n}{n+1}$$

故(ii)式成立。由此可知本习题得证。

5.证明：在本章书中的(17)式里取$a=1+x$，$b=-x$，则有

$$1=(1+x-x)^{n}=\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}(-x)^{k}(1+x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^{k}\binom{n}{k}x^{k}(1+x)^{n-k}$$

故本习题得证。

6.证明：我们有

$$(1+x)^n\sum_{i=0}^{k}(-1)^i x^i=(1+x)^n\sum_{i=0}^{k}(-x)^i$$

$$=(1+x)^n\frac{1-(-x)^{k+1}}{1-(-x)}$$

故(ii)式成立。

当$k\geqslant n$时则由于$\binom{n-1}{k}=0$ 及

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k-i}(-1)^i=\sum_{i=k-n}^{k}(-1)^i\binom{n}{k-i}$$

$$=(-1)^k\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\binom{n}{l}$$

$$=0$$

故(i)式成立。

当$1\leqslant k\leqslant n-1$时，则由于比较(ii)式中二边$x^k$的系数就知道(i)式成立，故本习题得证。

7.证明：我们有

$$\left(1-\frac{1}{1+nx}\right)^n-\left(1-\frac{1}{1+nx}\right)^n=0$$

$$=\left(1-\frac{1}{1+nx}\right)^n-\frac{nx}{1+nx}\left(1-\frac{1}{1+nx}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{1+nx}\right)^k-\frac{nx}{1+nx}\sum_{k\geqslant 0}\binom{n-1}{k}\left(-\frac{1}{1+nx}\right)^k$$

$$=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}-(1)^k\left(\frac{1}{1+nx}\right)^k-\frac{x}{1+nx}\sum_{k\geq 0}(k$$

$$+1)(-1)^k\binom{n}{k+1}\left(\frac{1}{1+nx}\right)^k$$

$$=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{1}{1+nx}\right)^k+\sum_{k\geq 1}\frac{(kx)(-1)^k\binom{n}{k}}{(1+nx)^k}$$

$$=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{1+kx}{(1+nx)^k}\right)$$

故本习题得证。

8.证明：当$n=r$时显见(i)式成立，现在我们假设(i)式对于$n=N$时（其中$N\geq r$）成立，即有

$$\sum_{k=0}^{N-r}\binom{r+k}{r}=\binom{N+1}{r+1}$$

由上式和本章书中的(17)式我们有

$$\sum_{k=0}^{N+1-r}\binom{r+k}{r}=\sum_{k=0}^{N-r}\binom{r+k}{r}+\binom{N+1}{r}$$

$$=\binom{N+1}{r+1}+\binom{N+1}{r}$$

$$=\binom{N+2}{r+1}$$

故由数学归纳法知道(i)式成立。又我们有

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\sum_{k=3}^{n+2}k(k-1)(k-2)$$

$$=6\sum_{k=3}^{n+2}\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}=6\sum_{k=3}^{n+2}\binom{k}{3}$$

$$=6\sum_{k=0}^{n-1}\binom{3+k}{3}=6\sum_{k=0}^{n+2-3}\binom{3+k}{3}$$

$$=6\binom{n+3}{4}$$

9. 证明：由本章习题 8 中(i)式我们有

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+r)=\sum_{k=r+1}^{n+r} k(k-1)\cdots(k-r)$$

$$=(r+1)!\sum_{k=r+1}^{n+r}\frac{k(k-1)\cdots(k-r)}{(r+1)!}$$

$$=(r+1)!\sum_{k=r+1}^{n+r}\binom{k}{r+1}$$

$$=(r+1)!\sum_{k=0}^{n-1}\binom{r+1+k}{r+1}$$

$$=(r+1)!\sum_{k=0}^{n+r-(r+1)}\binom{r+1+k}{r+1}$$

$$=(r+1)!\binom{n+r+1}{r+2}$$

所以本习题得证。

10. 证明：由于$\binom{n-k}{m-k}=\binom{n-k+1}{m-k}-\binom{n-k}{m-k-1}$，我们有

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n}{m}+\sum_{k=1}^{m-1}\binom{n-k}{m-k}+\binom{n-m}{m-m}$$

$$=\binom{n}{m}+\sum_{k=1}^{m-1}\left[\binom{n-k+1}{m-k}-\binom{n-k}{m-k-1}\right]+1$$

$$=\binom{n}{m}+\sum_{k=1}^{m-1}\binom{n-k+1}{m-k}-\sum_{k=1}^{m-1}\binom{n-k}{m-k-1}+1$$

$$=\binom{n}{m}+\sum_{k=1}^{m-1}\binom{n-(k-1)}{m-1-(k-1)}-\sum_{k=1}^{m-1}\binom{n-k}{m-k-1}+1$$

$$=\binom{n}{m}+\sum_{k=0}^{m-2}\binom{n-k}{m-1-k}-\sum_{k=1}^{m-1}\binom{n-k}{m-k-1}+1$$

$$=\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}+\sum_{k=1}^{m-2}\binom{n-k}{m-1-k}-\sum_{k=1}^{m-2}\binom{n-k}{m-k-1}$$

$$-\binom{n-(m-1)}{m-(m-1)-1}+1$$

$$=\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}-\binom{n-m+1}{0}+1$$

$$=\binom{n+1}{m}$$

故本习题得证。

11.解：由于

$$\binom{k}{m}\binom{n}{k}=\frac{k!}{m!(k-m)!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-m-(k-m))!}$$

$$=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

所以我们有

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}=\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}=\binom{n}{m}\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{k-m}$$

$$=\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-m}{k}=\binom{n}{m}(1+1)^{n-m}$$

$$=\binom{n}{m}2^{n-m}$$

故本习题得解。

12. 证明：当$n\leqslant m$时，由于$n<k$时，有$\binom{n}{k}=0$，故我们有

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0=(-1)^m\binom{n-1}{m}$$

故当$n\leqslant m$时，本习题结论成立。

现在设$0\leqslant m<n$，我们使用数学归纳法来证明此时本习题的结论也成立。由于$(-1)^0\binom{m}{0}=1=(-1)^0\binom{n-1}{0}$而得到当$m=0$时，本习题结论成立。现在我们假设$0\leqslant M<n$而当$m=M$时，本习题的结论成立，即有

$$\sum_{k=0}^{M}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^M\binom{n-1}{M}$$

则当$m=M+1$时，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{M+1}(-1)^k\binom{n}{k}&=\sum_{k=0}^{M}(-1)^k\binom{n}{k}+(-1)^{M+1}\binom{n}{M+1}\\&=(-1)^M\binom{n-1}{M}+(-1)^{M+1}\binom{n}{M+1}\\&=(-1)^{M+1}\left[\binom{n}{M+1}-\binom{n-1}{M}\right]\\&=(-1)^{M+1}\binom{n-1}{M+1}\end{aligned}$$

即当$m=M+1$时，本习题结论也成立，故由数学归纳法得知本习题得证。

13. 证明：我们对n使用数学归纳法。由于$\binom{m+0}{0}=1=$

$\binom{m+0+1}{0}$，故当$n=0$时，本习题结论成立。现在我们假定当$n=N$（其中$N\geqslant 0$）时，本习题结论成立，即有

$$\sum_{k=0}^{N}\binom{m+k}{k}=\binom{m+N+1}{N}$$

则当$n=N+1$时，由上式我们有

$$\sum_{k=0}^{N+1}\binom{m+k}{k}=\sum_{k=0}^{N}\binom{m+k}{k}+\binom{m+N+1}{N+1}$$

$$=\binom{m+N+1}{N}+\binom{m+N+1}{N+1}$$

$$=\binom{m+(N+1)+1}{N+1}$$

所以当$n=N+1$时，本习题结论也成立。故本习题得证。

14. 证明：我们对n使用数学归纳法，由于$\binom{m}{r}=\binom{m+1}{r+1}-\binom{m}{r+1}$，故当$n=m$时，本习题结论成立。现在我们假定当$n=N$（其中$m\leqslant N$）时，本习题结论成立，即有

$$\sum_{k=m}^{N}\binom{k}{r}=\binom{N+1}{r+1}-\binom{m}{r+1}$$

由上式，我们有

$$\sum_{k=m}^{N+1}\binom{k}{r}=\sum_{k=m}^{N}\binom{k}{r}+\binom{N+1}{r}$$

$$=\binom{N+1}{r+1}-\binom{m}{r+1}+\binom{N+1}{r}$$

$$=\binom{(N+1)+1}{r+1}-\binom{m}{r+1}$$

故当$n=N+1$时，本习题结论也成立。所以本习题得证。

15. 证明：当$k\geqslant 0$和$N\geqslant 0$时，我们先证明

$$\sum_{m=0}^{k}\binom{N+m}{m}=\binom{N+1+k}{k} \tag{4}$$

由于$\binom{N+0}{0}=1=\binom{N+1+0}{0}$，故当$k=0$时(4)式成立，现在假定当$k=K$（其中$K\geqslant 0$）时，(4)式成立，则有

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{K+1}\binom{N+m}{m}&=\sum_{m=0}^{K}\binom{N+m}{m}+\binom{N+K+1}{K+1}\\&=\binom{N+1+K}{K}+\binom{N+K+1}{K+1}\\&=\binom{N+1+K+1}{K+1}\end{aligned}$$

故当$k=K+1$时(4)式也成立，故由数学归纳法知道(4)式成立。下面我们再用数学归纳法来证明本习题的结论正确。

由于$(1-x)^{-0-1}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{0+k}{k}x^k$，故当$n=0$时本习题结论正确。现在假定当$n=N$（其中$N\geqslant 0$）时结论正确，即有

$$(1-x)^{-N-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{N+k}{k}x^k$$

则当$n=N+1$时，由(4)式我们有

$$\begin{aligned}(1-x)^{-(N+1)-1}&=(1-x)^{-N-1}\cdot(1-x)^{-1}\\&=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{N+k}{k}x^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}x^m\right)\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}\binom{N+m}{m}\right)x^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{N+k+1}{k}x^{k}$$

故由数学归纳法知道本习题得证。

16.证明：由于

$$(1+x)^{n}(1-x)^{-1}=(1-x^{2})^{n}(1-x)^{-n-1} \qquad (5)$$

(5)式左端的展开式为

$$(1+x)^{n}(1-x)^{-1}=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}x^{j}\right)$$

其中x^n项的系数为$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}$。

由本章习题15，得到(4)式右端展开式为

$$\begin{aligned}&(1-x^{2})^{n}(1-x)^{-n-1}\\&=\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}x^{2k}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n+m}{n}x^{m}\right)\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n+m}{n}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}x^{2k+m}\right)\end{aligned}$$

其中x^n项的系数为$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}$

由比较(5)式两边展开式中的x^n项的系数可得本习题结论成立。

17.证明：当$m=n$时，我们有

$$\sum_{k=n}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{n}(-1)^{k+n}=\binom{n}{n}\binom{n}{n}(-1)^{n+n}=1 \qquad (6)$$

当$m<n$时，我们有

$$\binom{n}{m}(1+x)^{n-m}=\frac{(n)_{m}(1+x)^{n-m}}{m!}$$

$$=\frac{1}{m!}D_x^{(m)}(1+x)^n$$

$$=\frac{1}{m!}D_x^{(m)}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)$$

$$=\frac{1}{m!}\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)\cdots(k-m+1)x^{k-m}$$

$$=\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}x^{k-m} \tag{7}$$

在(7)式中令$x=-1$，则得到

$$0=\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}(-1)^{k-m}$$

由(6)式和上式，我们知道本习题得证。又若在(7)式中令$x=1$，则可得到本章习题11的另一种证明方法。

18.证明：本由章习题15，我们有

$$(1-x)^{-m-l-2}=\sum_{i=m+l}^{\infty}\binom{i+1}{m+l+1}x^{i-m-l} \tag{8}$$

$$(1-x)^{-l-1}=\sum_{j=l}^{\infty}\binom{j}{l}x^{j-l} \tag{9}$$

$$(1-x)^{-m-1}=\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k}{m}x^{k-m} \tag{10}$$

由(8)，(9)和(10)式我们有

$$\sum_{i=m+l}^{\infty}\binom{i+1}{m+l+1}x^{i-m-l}=(1-x)^{-m-l-2}$$

$$=(1-x)^{-m-1}(1-x)^{-l-1}$$

$$=\left(\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k}{m}x^{k-m}\right)\cdot\left(\sum_{j=l}^{\infty}\binom{j}{l}x^{j-l}\right)$$

比较上式两边x^{n-m-l}项的系数，我们有

$$\binom{n+1}{m+l+1}=\binom{m}{m}\binom{n-m}{l}+\binom{m+1}{m}\binom{n-(m+1)}{l}+\cdots$$

$$+\binom{n-l}{m}\binom{n-(n-l)}{l}$$

$$=\binom{m}{m}\binom{n-m}{l}+\binom{m+1}{m}\binom{n-(m+1)}{l}+\cdots$$

$$+\binom{n-l}{m}\binom{l}{l}+\binom{n-l+1}{m}\binom{l-1}{l}+\cdots$$

$$+\binom{n-1}{m}\binom{1}{l}+\binom{n}{m}\binom{0}{l}$$

$$=\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n-k}{l}$$

故本习题得证。

19.证明：由二项式定理，我们有

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-x^2)^i=(1-x^2)^n=(1+x)^n(1-x)^n$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^k\right)$$

比较上式两边中x^m的系数，我们有

当m为奇数时，左边没有x的奇次项，因而我们得到

$$0=\binom{n}{0}\binom{n}{m}(-1)^m+\binom{n}{1}\binom{n}{m-1}(-1)^{m-1}+\cdots$$

$$+\binom{n}{m}\binom{n}{m-m}(-1)^{m-m}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n}{m-k} \tag{11}$$

当m为偶数时，则有

$$\binom{n}{\frac{m}{2}}(-1)^{\frac{m}{2}}=\binom{n}{0}\binom{n}{m}(-1)^{m}+\binom{n}{1}\binom{n}{m-1}(-1)^{m-1}$$

$$+\cdots+\binom{n}{m}\binom{n}{m-m}(-1)^{m-m}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{n}{k}\binom{n}{m-k} \qquad (12)$$

由(11)和(12)式，本习题得证。

第三章

1.证明：我们使用反证法来证明本习题。假设存在一种分法，它使得对任意一个满足条件$1\leqslant m\leqslant n$的正整数m，我们都有第m个集合的元素个数$<a_m$，则这n个集合所包含的全部元素个数$\leqslant(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_n-1)$

$=a_1+\cdots+a_n-n<a_1+a_2+\cdots+a_n-n+1$

这显然和假定有$a_1+a_2+\cdots+a_n-n+1$个元素相矛盾，因而本习题得证。

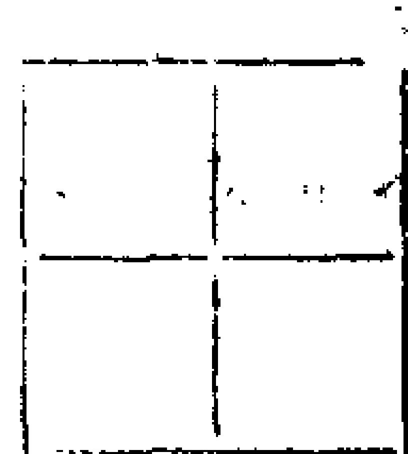
2.证明：要证明本习题的结论正确，我们只需去证明$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_{2m+1}-(2m+1))$中至少有一个因子是偶数即可。

从1到$2m+1$这$2m+1$个连续自然数中，有m个是偶数，有$m+1$个是奇数。又因为a_1，a_2，…，a_{2m+1}是1，2，…，$2m+1$的更列，故也有

m个偶数和$m+1$个奇数。因此，a_1，a_2，…，a_{2m+1}的$m+1$个奇数，最多能与1，2，…，$2m+1$中的m个偶数配对，而剩下的一个奇数只能与1，2，…，$2m+1$中的某一个奇数配对，不妨设这一对为a_i与i（其中$1\leqslant i\leqslant 2m+1$），故$a_i-i$为偶数，所以本习题得证。

3.证明：A中共有10个元素，故A的所有子集合的个数为$2^{10}=1024$，除去空集合与A本身之外，尚有1022个不同的非空真子集。由于A中的任一个元素x都满足条件$10\leqslant x\leqslant 99$，并且每个非空真子集最多包含有9个元素，因而每个非空真子集的元素之和必然不小于10而不大于$90+91+\cdots+99=945$。我们将10，11，…，945看为是936个抽屉而将1022个非空真子集的元素的和看为是1022个物体，由抽屉原则，必有一个抽屉有2个（或2个以上的）物体，即是说有两个非空真子集的元素之和相等，不妨设这两个非空真子集为B_1和E_1，当B_1与E_1中可能有相同的元素时（但是不全相同的），我们把相同的元素删去后，仍可得两个不相交的非空真子集B与E，使它们的元素之和相等。所以本习题得证。

4.证明：如图所示，我们把正方形的对边中点连接起来，就得到4个小正方形，将这4个小正方形看为是4个抽屉，而把5个点看为是5个物体，则必有一个抽屉包含有至少两个物体，这就是说至少有两点要落在同一个小正方形内。而小正方形的边长为$\frac{1}{2}$，故对角线的长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，因而落在同一个



小正方形中的两点距离必定不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以本习题得证。

5.证明：我们先来看每一列的三个小方格的涂色方式，因为每个小方格有两种涂色方法，故每一列的涂色方式共有$2^3=8$种。我们把这8种涂色方式看为是8个抽屉而把9列看为是9个物体，则由抽屉原则，至少有两列有相同的涂色方式。故本习题得证。

6.证明：设这五个整数是a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，又设它们被3除后所得的余数分别是b_1，b_2，b_3，b_4，b_5，则显然有$0 \leqslant b_i \leqslant 2$，$i=1$，2，…，5。我们将0，1，2看为是三个抽屉，而把b_1，b_2，b_3，b_4，b_5看为是5个物体。我们分三种情况来进行讨论。

(i) 若有两个抽屉是空的，则5个物体都在同一个抽屉里，我们从这个抽屉里任取出三个物体，也就是说这三个整数被3除后所得的余数相同，因而这三个余数之和能被3整除，于是这三个整数之和也能被3整除。

(ii) 若有一个抽屉是空的，则5个物体都在另外两个抽屉里，由抽屉原则，必有一个抽屉包含至少三个物体，从这个抽屉里取出三个数来，与(i)的分析一样，这三个整数之和能够被3整除。

(iii) 若三个抽屉都不空，则我们分别从三个抽屉中各取出一个整数。这三个数来自不同的抽屉，因而余数分别为0，1，2，三个余数的和为$0+1+2=3$，当然能被3整除，于是得到这三个整数之和也能被3整除。

由(i)，(ii)和(iii)，本习题得证。

7. 证明：因为一个整数被 n 除后所得的余数只可能是0，1，…，$n-1$这 n 个数中的1个，因此，我们把0，1，…，$n-1$这 n 个数看为是 n 个抽屉，而把a_1，…，a_{n^2-2n+2}看为是n^2-2n+2个物体。我们分两种情况来进行讨论。

(i) 当有1个（或1个以上的）抽屉是空的时，则 n^2-2n+2个物体全部放进$n-1$个抽屉了。根据抽屉原则，必有一个抽屉包含有至少$\left[\frac{n^2-2n+2-1}{n-1}\right]+1=[n-1]+1=n$ 个物体，也就是说，有 n 个数被 n 除后所得的余数相同，因而这 n 个余数之和能够被 n 整除，于是这 n 个整数之和也能够被 n 整除。

(ii) 当 n 个抽屉都不空时，我们可以从这 n 个抽屉中各取出一个整数来，由于这 n 个整数来自不同的抽屉，因而它们被 n 除后所得的余数应该分别为0，1，…，$n-1$，这 n 个余数之和为$0+1+\cdots+n-1=\frac{(n-1)n}{2}$。当 n 是一个奇数时，则有$n-1$是偶数，故$\frac{n-1}{2}$是整数，于是得到$\frac{n-1}{2}\cdot n$是 n 的倍数，即这 n 个余数之和能够被 n 整除，进而得到这 n 个整数之和也能被 n 整除。

8. 证明：不妨设这$n+1$个正整数满足不等式

$$0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{n+1}$$

若上式中有一个等号成立，例如存在一个固定的 i（其中$1\leqslant i\leqslant n$）使得$a_i=a_{i+1}$成立，则$a_{i+1}-a_i=0$，而0能被 n 整

除，因此本习题结论已经成立。故可进一步假设 $0<a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}$。如果本习题结论不正确，即对任意的i，j，（其中$1\leqslant i<j\leqslant n+1$），$a_j-a_i$都不是 n 的整数倍。我们令

$$b_i=a_{n+1}-a_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

由反证法假设，$b_i(i=1, 2, \cdots, n)$都不能被 n 整除，我们设它们被 n 除后所得的余数分别为 c_1，c_2，$\cdots$，a_n，显然有$1\leqslant c_i\leqslant n-1(i=1, 2, \cdots, n)$。我们把1，2，$\cdots$，$n-1$看为是$n-1$个抽屉，而把正整数$c_1$，$c_2$，$\cdots$，$c_n$ 看为是 n 个物体，根据抽屉原则，至少存在两个正整数 i，j（其中$1\leqslant i<j\leqslant n$），使得$c_i=c_j$即有$(a_{n+1}-a_i)-k_in=(a_{n+1}-a_j)-k_jn$（其中$k_i$和$k_j$都是整数），于是我们得到

$$a_j-a_i=(k_i-k_j)n$$

这与反证法假设矛盾，所以本习题得证。

9. 证明：我们可以设这 n 个正整数满足不等式

$$0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$$

若上式中有一个等号成立，则本习题结论已经成立，故可进一步假设

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_n$$

我们使用反证法来证明本习题结论，在上面不等式下仍然正确。若不然，则对任意的i，j（其中$1\leqslant i<j\leqslant n$），$a_j-a_i$和$a_j+a_i$都不能被 n 整除。我们令 $b_i=a_n-a_i$ $(i=,\ 2, \cdots, n-1)$，又令$b_n=a_n+a_1$，由反证法假设$b_i(i=1, 2, \cdots, n)$都不能被 n 整除，我们设它们被 n 除后所得的余数分别为c_1，c_2，$\cdots$，c_n，则显然有$1\leqslant c_i\leqslant n-1$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。我们

把1，2，…，$n-1$看为是$n-1$个抽屉，而把正整数c_1，c_2，…，c_n看为是n个物体，根据抽屉原则，至少存在两个正整数i，j（其中$1\leqslant i<j\leqslant n$）使得

$$c_i=c_j$$

当$j=n$时，上式即为$(a_n-a_i)-k_i n=(a_n+a_1)-k_n n$（其中$k_i$与$k_n$都是整数），故我们有

$$a_1+a_i=(k_n-k_i)n$$

这与反证法假设矛盾。

当$1\leqslant i<j\leqslant n-1$时，即有$(a_n-a_i)-k_i n=(a_n-a_j)-k_j n$（其中$k_i$与$k_j$都是整数），故我们有

$$a_j-a_i=(k_i-k_j)n$$

这也与反证法假设矛盾。

由以上的论述，本习题得证。

10.证明：我们将对a和b使用双重归纳法。当$b=2$时，由本章书中的(2)式，我们有

$$N(a,\ 2)=a=\binom{a+2-2}{a-1}$$

因而本习题结论当$b=2$时成立。当$a=2$时，由本章书中的(1)和(2)式我们有

$$N(2,\ b)=b=\binom{2+b-2}{2-1}$$

故本习题结论当$a=2$时也成立。

现在我们假定对于$N(a,\ b-1)$和$N(a-1,\ b)$，本习题结论都成立，即有

$$N(a,\ b-1)\leqslant\binom{a+b-1-2}{a-1}=\binom{a+b-3}{a-1}$$

$$N(a-1,\ b)\leqslant\binom{a-1+b-2}{a-1-1}=\binom{a+b-3}{a-2}$$

而来证明本习题结论对$N(a,\ b)$也成立，因而由数学归纳法就知道本习题结论成立。

由本章书中的(3)式，我们有

$$N(a,\ b)\leqslant N(a,\ b-1)+N(a-1,\ b)$$

$$\leqslant\binom{a+b-3}{a-1}+\binom{a+b-3}{a-2}$$

$$=\binom{a+b-3+1}{a-1}=\binom{a+b-2}{a-1}$$

故本习题得证。

11.证明：对于任一整数n，将区间$[0,\ 1)$等分为n个小区间：

$$\left[0,\ \frac{1}{n}\right),\ \left[\frac{1}{n},\ \frac{2}{n}\right),\ \cdots,\ \left[\frac{n-1}{n},\ 1\right)。$$

对任一实数$\alpha\in[0,\ 1)$，必在且仅在某一小区间内。对任给实数w，考虑如下$n+1$个实数

$$0\leqslant iw-[iw]<1\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

根据抽屉原则，在上述n个小区间中，至少存在一个小区间，其内同时落入两个上述这样的实数。不妨设为$rw-[rw]$和$sw-[sw]$，这两实数进入同一小区间。记

$$r-s=a,\ [rw]-[sw]=b,$$

由于小区间长小于$\frac{1}{n}$，故

$$|(rw-[rw])-(sw-[sw])|=|aw-b|<\frac{1}{n}。$$

由于$0\leqslant r\leqslant n$，$0\leqslant s\leqslant n$，$a\neq 0$，故$0<|a|\leqslant n$。于是当$a>0$时，取$x=a$，$y=b$，即得证；当$a<0$时，取$x=-a$，$y=-b$，问题亦得证。

12.解：我们有

$$ab=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&3&5&2&4&1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&7&2&1&3&4&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&2&3&7&1&6&5\end{pmatrix}$$

$$ba=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&7&2&1&3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&3&5&2&4&1&7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&7&3&6&5&2&4\end{pmatrix}$$

故得到$ab\neq ba$。

13.证明：设$P_1=(a,\ b)$，则我们有

$$P_1^2=(a,\ b)(a,\ b)=(a)(b)=I$$

设$P_2=(a,\ b,\ c)$，则我们有

$$P_2^3=(a,\ b,\ c)(a,\ b,\ c)(a,\ b,\ c)$$
$$=(a,\ c,\ b)(a,\ b,\ c)=I$$

设$P_{k-1}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_k)$则我们有

$$P^k_{k-1}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,a_k)(a_1,a_2,\cdots,a_k)\cdots(a_1,a_2,\cdots,a_k)$$

我们首先来看a_1的变化：在第一个因子里，$a_1\to a_2$；在第二

个因子里，$a_2\to a_3$；在第三个因子里，$a_3\to a_4$；…；在第 n（其中$1\leqslant n\leqslant k-1$）个因子里，$a_n\to a_{n+1}$，…，最后在第 k 个因子里，$a_k\to a_1$。因而当这 k 个因子乘起来时，a_1 的变化路线是$a_1\to a_2\to a_3\to\cdots\to a_k\to a_1$，所以在乘积运算后得到的第一个因子是$(a_1)$。现在我们再来看$a_2$的变化：在第一个因子里，$a_2\to a_3$；在第二个因子里，$a_3\to a_4$；…；在第 n 个因子里（其中 n 满足条件$1\leqslant n\leqslant k-2$），$a_{n+1}\to a_{n+2}$；…；在第 $k-1$个因子里，$a_k\to a_1$；在第 k 个因子里，$a_1\to a_2$。因此，在这 k 个因子的乘积里，a_2的变化路线是 $a_2\to a_3\to\cdots\to a_k\to a_1\to a_2$，所以在乘积运算后得到的第二个因子是$(a_2)$。以此类推，在乘积中$a_n$（其中 n 满足条件$1\leqslant n\leqslant k-1$）的变化路线是$a_n\to a_{n+1}\to\cdots\to a_k\to a_1\to\cdots\to a_n$，所以在乘积运算后我们得到的第 n 个因子是(a_n)，…，最后，在乘积中a_k 的变化路线是$a_k\to a_1\to a_2\to\cdots\to a_{k-1}\to a_k$，所以在乘积运算后我们得到的最后一个因子是$(a_k)$。由上面的论述，我们有

$$P^k_{k-1}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k)(a_1,a_2\cdots,a_k)\cdots(a_1,a_2,\cdots,a_k)$$
$$=(a_1)(a_2)\cdots(a_k)=I。$$

故本习题得证。

14. 证明：由于$P=(1,\ 2)(3,\ 4,\ 5,\ 6)$，我们有

$$P^2=(1,\ 2)(3,\ 4,\ 5,\ 6)(1,\ 2)(3,\ 4,\ 5,\ 6)$$
$$=(1)(2)(3,\ 5)(4,\ 6)=(3,\ 5)(4,\ 6)$$
$$P^3=P^2P=(3,\ 5)(4,\ 6)(1,\ 2)(3,\ 4,\ 5,\ 6)$$
$$=(1,\ 2)(3,\ 6,\ 5,\ 4)$$
$$P^4=P^3P=(1,\ 2)(3,\ 6,\ 5,\ 4)(1,\ 2)(3,\ 4,\ 5,\ 6)$$

$$=(1)(2)(3)(4)(5)(6)=I$$

故本习题得证。

第四章

1.解：我们用P_1来表示一个整数能被13整除的这个性质，用P_2来表示一个整数能被51整除的这个性质，用A来表示从1到10000中的所有整数所组成的集合，用A_1来表示A中的具有性质P_1的整数所组成的子集合，用A_2来表示A中的具有性质P_2的整数所组成的子集合，于是我们要求的就是集合$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2$中的整数的个数。首先，我们有

$$|A_1|=\left[\frac{10000}{13}\right]=769$$

$$|A_2|=\left[\frac{10000}{51}\right]=196$$

在集合$A_1\cap A_2$中的整数是同时能够被13和51整除的，而一个整数能够同时被13和51整除的充要条件是这个整数能够被13与51的最小公倍数整除，13与51的最小公倍数是663，所以$A_1\cap A_2$中的整数一定能够被663整除，故我们有

$$|A_1\cap A_2|=\left[\frac{10000}{663}\right]=15$$

于是由本章书中定理 1，我们得到，1 到 10000 中的既不能被13整除又不能被51整除的整数的个数为

$$
\begin{aligned}
|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| &= |A| - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2| \\
&= 10000 - (769 + 196) + 15 \\
&= 9050
\end{aligned}
$$

故本习题得解。

2.解：设参加竞赛的120个学生所组成的集合为 S，而其中做对甲题的学生组成的集合为 A_1，做对乙题的学生组成的集合为 A_2，做对丙题的学生的集合为 A_3；那么既做对甲题又做对乙题的学生的集合为 $A_1 \cap A_2$，既做对甲题又做对丙题的学生的集合为 $A_1 \cap A_3$，既做对乙题又做对丙题的学生的集合为 $A_2 \cap A_3$；三题都做对的学生的集合为 $A_1 \cap A_2 \cap A_3$，三题都没有做对的学生的集合为 $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$。由题目所给的已知条件，我们有

$$
|S| = 120, \quad |A_1| = 48, \quad |A_2| = 56, \quad |A_1 \cap A_2| = 20,
$$
$$
|A_1 \cap A_3| = 16, \quad |A_2 \cap A_3| = 28, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 12,
$$
$$
|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = 16
$$

由本章书中定理 1，我们得到

$$
\begin{aligned}
|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| \\
+ |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|
\end{aligned}
$$

即是

$$
\begin{aligned}
|A_3| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \\
+ |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| \\
= 120 - 48 - 56 + 20 + 16 + 28 - 12 - 16
\end{aligned}
$$

$=52$

故做对了丙题的学生有52名，本习题得解。

3.证明：当$n=1$时，$\varphi(1)=1$。当$n>1$时，设p是n的一个素因数，又令r是满足条件$p^r\mid n$的最大整数，于是我们可设$n=p^ra$，则得到$(a, p)=1$。由于$\varphi(n)$是积性函数，故有

$$\varphi(n)=\varphi(p^ra)=\varphi(p^r)\varphi(a)=p^{r-1}(p-1)\varphi(a)$$

当p是奇素数时，$2\mid p-1$，故$\varphi(n)$是偶数。当$p=2$，$r>1$时，$\varphi(n)$也是偶数；当$p=2$，$r=1$时$\varphi(n)=\varphi(a)$，其中a是奇数。这时如果$a=1$，由$\varphi(a)=1$知$\varphi(n)=1$；如果$a>1$，由于a本身是奇数，它的素因数当然也是奇数，由前面的证明$\varphi(a)$是偶数，从而$\varphi(n)$也是偶数。故本习题得证。

4.证明：我们分两种情况来讨论。

(i) 当$m<n$时，则我们有$m, m+1, m+2, \cdots, m+n-1$中有一些数大于$n$，有一些数小于$n$，因而这$n$个数就为

$$m,\ m+1,\ \cdots,\ n,\ n+1,\ \cdots,\ m+n-1$$

将这些数除以n，余数为

$$m,\ m+1,\ \cdots,\ n-1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$$

此中所有与n互素的整数与

$$1,\ 2,\ \cdots,\ m-1,\ m,\ m+1,\ \cdots,\ n$$

中所有与n互素的整数相同，这样的整数个数为$\varphi(n)$。又由于如果$(l, n)=1$，则$(l+qn, n)=1$，其中q是任意整数。因此原来的n个连续整数中与n互素的个数为$\varphi(n)$。

(ii) 当$m\geqslant n$时，将$m, m+1, \cdots, m+n-1$除以n后所

得的余数设为r_1、r_2，…，r_n，其中当$1\leqslant i\leqslant n$时都有$0\leqslant r_i\leqslant n-1$。其次我们要来证明$r_1$，$r_2$，…，$r_n$中的数两两互相不等，若不然，存在有某一对$i$和$j$（其中$1\leqslant i<j\leqslant n$），使得$r_i=r_j$，则得到$m+i-1\equiv m+j-1(\bmod n)$这显然是不可能的，故$r_1,r_2$，…，$r_n$是0，1，…，$n-1$的一个更列。于是$r_1$，$r_2$，…，$r_n$中所有与$n$互素的整数和1，2，…，$n$中所有与$n$互素的整数相同，仿(i)的讨论，我们也能得到$m$，$m+1$，…，$m+n-1$中与$n$互素的整数个数为$\varphi(n)$。

由(i)(ii)，本习题得证。

5．证明：设$n=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_r^{\alpha_r}$，其中$r$和$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_r$都是正整数，而$P_1$，$P_2$，…，$P_r$都是各不相同的素数。由本章书中例3的公式，则我们有

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{P_r}\right)$$

又由同一公式得到当m是一个正整数时有

$$\varphi(n^m)=n^m\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{P_r}\right)$$

所以我们有

$$\varphi(n^m)=n^{m-1}\cdot n\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{P_r}\right)$$

$$=n^{m-1}\varphi(n)$$

特别是当$m=2$时，我们有

$$\varphi(n^2)=n^{2-1}\varphi(n)=n\varphi(n)。$$

故本习题得证。

6.解：由于5186＝2×2593，而2与2593都是素数，故由本章书中的例3里的公式，我们有

$$\varphi(5186)=5186\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2593}\right)$$

$$=2\times2593\times\frac{1}{2}\times\frac{2592}{2593}$$

$$=2592$$

由于5187＝3×7×13×19，而3、7，13，19都是素数，故由本章书中例3的公式，我们有

$$\varphi(5187)=5187\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\left(1-\frac{1}{19}\right)$$

$$=3\times7\times13\times19\times\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}\times\frac{12}{13}\times\frac{18}{19}$$

$$=2592$$

由于 $5188=2^2\cdot1297$，而2与1297都是素数，故由本章书中例3的公式，我们有

$$\varphi(5188)=5188\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{1297}\right)$$

$$=2^2\times1297\times\frac{1}{2}\times\frac{1296}{1297}$$

$$=2592$$

所以本习题得解。

第五章

1.证明：令

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^n$$

则由于$F_1=F_2=1$和当$n\geqslant3$时有$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$而我们得到

$$\begin{aligned}&G(x)-xG(x)-x^2G(x)\\=&x+(F_2-F_1)x^2+\sum_{n\geqslant3}(F_n-F_{n-1}-F_{n-2})x^n\\=&x\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}G(x)&=\frac{x}{1-x-x^2}\\&=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x}{\sqrt{5}\left(1-\frac{(1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5})x}{2}+\frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})x^2}{4}\right)}\\&=\frac{(a-b)x}{\sqrt{5}(1-ax-bx+abx^2)}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-ax}-\frac{1}{1-bx}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ax)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(bx)^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{\sqrt{5}}x^n$$

比较上式两边x^n的系数，就知道(i)式成立。

在(i)式中，由于F_n是个正整数，并且当$n\geqslant 1$时有

$$0<\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{\sqrt{5}(2^n)}<1$$

从而得到

$$F_n=\left[\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\right]+c_n$$

故(ii)式成立。

现在我们来看(ii)式的一些奇异现象，我们知道$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$和$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$这两个数都是无理数而费波那契数都是正整数。正整数可用无理数来表示，这真是有些奇特。由(ii)式知道，当我们要计算F_n的数值时，只需计算$\frac{(1+\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}(2^n)}$中的整数部分的数值。

2.证明：令$L_0=2$，又令

$$L(x)=\sum_{n=0}^{\infty}L_nx^n$$

则由于$L_0=2$，$L_1=1$，$L_2=3$和当$n\geqslant 3$时有

$$L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$$

而我们有

$$L(x)-xL(x)-x^2L(x)=$$

$$=2+(1-2)x+(3-1-2)x^2+\sum_{n=0}^{\infty}(L_n-L_{n-1}-L_{n-2})x^n$$

$$=2-x$$

即有

$$L(x)=\frac{2-x}{1-x-x^2}=\frac{1-ax+1-bx}{(1-ax)(1-bx)}$$

$$=\frac{1}{1-ax}+\frac{1}{1-bx}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(ax)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(bx)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a^n+b^n)x^n$$

比较上式二边x^n中的系数就知道(i)式成立。

在(i)式中，由于L_n是一个正整数和当$n\geqslant 1$时有

$$0<\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n<1$$

而知道(ii)式成立，所以本习题得证。

3.证明：当$n\geqslant 1$时，则由本章习题1中的(i)式和习题2中的(i)式，我们有

$$L_n^2-5F_n^2=(a^n+b^n)^2-(a^n-b^n)^2$$

$$=4(ab)^n=4(-1)^n \qquad (1)$$

由上式即知本习题成立。

4.证明：当$n\geqslant 1$时，则由本章习题1中的(i)式，我

们有

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}$$

$$= \frac{1}{5}\{(a^n - b^n)^2 - (a^{n+1} - b^{n+1})(a^{n-1} - b^{n-1})\}$$

$$= \frac{(-2)(-4)^n + (12)(-4)^{n-1}}{(5)(2^{2n})}$$

$$= \frac{(-4)^{n-1}(8+12)}{(5)(2^{2n})} = (-1)^{n-1}$$

由上式，我们有

$$(F_n,\ F_{n+1}) = 1$$

由本章习题 2 中的(i)式，我们有

$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = (a^n + b^n)^2 - (a^{n-1} + b^{n-1})(a^{n+1} + b^{n+1})$$

$$= \frac{2(1+\sqrt{5})^n(1-\sqrt{5})^n - (1+\sqrt{5})^{n-1}(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{2n}}$$

$$\underline{((1+\sqrt{5})^2 + (1-\sqrt{5})^2)}$$

$$= (-1)^n 5$$

由上式及(1)式，我们有

$$(L_n,\ L_{n+1}) = 1$$

故本习题得证。

5.证明：现在我们要使用数学归纳法来证明本题结论成立。当$n=1$时，显见结论成立。现设当$n=1$，…，$N-1$时，本题结论都成立，而来证明当$n=N$时，结论也能成立。当$n\geqslant 1$，$m\geqslant 1$时则由本章习题 1 中的(i)式和习题 2 中的(i)式

我们有

$$F_nL_m+F_mL_n$$

$$=\frac{((1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n)((1+\sqrt{5})^m+(1-\sqrt{5})^m)}{(\sqrt{5})(2^{n+m})}$$

$$+\frac{((1+\sqrt{5})^m-(1-\sqrt{5})^m)((1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n)}{(\sqrt{5})(2^{n+m})}$$

$$=\frac{2((1+\sqrt{5})^{n+m}-(1-\sqrt{5})^{n+m})}{(\sqrt{5})(2^{n+m})}$$

$$=2F_{n+m}$$

由上式我们有

$$2F_{Nm}=2F_{m+(N-1)m}=F_mL_{(N-1)m}+F_{(N-1)m}L_m \qquad (2)$$

由于归纳法假设有$F_m|F_{(N-1)m}$和(2)式，我们有 $F_m|2F_{Nm}$，故当F_m是奇数时则我们有$F_m|F_{Nm}$，现设 F_m 是偶数，则由本章习题 3 知道 L_m 也是偶数，由于 F_m 是偶数和 $F_m|F_{(N-1)m}$知道$F_{(N-1)m}$也是偶数，又由本章习题3知道$L_{(N-1)m}$也是偶数，由(2)式我们有

$$F_{Nm}=F_m\left(\frac{L_{(N-1)m}}{2}\right)+F_{(N-1)m}\left(\frac{L_m}{2}\right)$$

其中$\frac{L_{(N-1)m}}{2}$和$\frac{L_m}{2}$都是正整数，由于$F_m|F_{(N-1)m}$，故当F_m是偶数时我们也有$F_m|F_{Nm}$，因而由数学归纳法知道本习题结论成立。

6.证明：由本章习题 1 中(i)式我们有

$$F^2_{4k}-F_{4k-2}F_{4k+2}$$

$$=\left(\frac{1}{(5)(2^{8k})}\right)\{((1+\sqrt{5})^{4k}-(1-\sqrt{5})^{4k})^2-((1+\sqrt{5})^{4k-2}-(1-\sqrt{5})^{4k-2})((1+\sqrt{5})^{4k+2}-(1-\sqrt{5})^{4k+2})\}$$

$$=\frac{(-2)(1+\sqrt{5})^{4k}(1-\sqrt{5})^{4k}+(1+\sqrt{5})^{4k-2}(1-\sqrt{5})^{4k-2}((1+\sqrt{5})^4+(1-\sqrt{5})^4)}{(5)(2^{8k})}$$

$$=\frac{(-2)(-4)^{4k}+(-4)^{4k-2}(2+60+50)}{(5)(2^{8k})}$$

$$=1$$

故本习题得证。

7.证明：当 n 是 3 的倍数时则由本章习题 5 我们有 $F_3 \mid F_n$，又由于 $F_3=2$，故得到 $2 \mid F_n$。现设 $2 \mid F_n$ 而来证明 n 一定是 3 的倍数。我们令 $n=3k+l$，其中 $0 \leqslant l \leqslant 2$，当 $l=0$ 时则 n 是 3 的倍数。当 $l=1$ 时，则由于 $2 \mid F_{3k+1}$ 和 $2 \mid F_{3k}$ 而得到 $2 \mid (F_{3k}, F_{3k+1})$，这和本章习题 4 的结论发生矛盾；当 $l=2$ 时，则由于 $2 \mid F_{3k+2}$ 和 $2 \mid F_{3k+3}$ 而得到 $2 \mid (F_{3k+2}, F_{3k+3})$，这也和本章习题 4 的结论发生矛盾，故当 $2 \mid F_n$ 时，则 n 一定是 3 的倍数。

当 n 是 4 的倍数时，则由本章习题 5 我们有 $F_4 \mid F_n$，又由于 $F_4=3$，故得到 $3 \mid F_n$；现设 $3 \mid F_n$ 而来证明 n 一定是 4 的倍数。令 $n=4k+l$，其中 $0 \leqslant l \leqslant 3$，当 $l=0$ 时则 n 是 4 的倍数；当 $l=1$ 时，则由于 $3 \mid F_{4k+1}$ 和 $3 \mid F_{4k}$ 而得到 $3 \mid (F_{4k},$

F_{4k+1}），这和本章习题 4 的结论发生矛盾；当$l=2$时，由于$3\mid F_{4k+2}$和$3\mid F_4$而得到$3\mid(F_4,\ F_{4k+2})$，这和本章习题 6 的结论发生矛盾；当$l=3$时，则由于$3\mid F_{4k+3}$和$3\mid F_{4k+4}$而得到$3\mid(F_{4k+3},\ F_{4k+4})$，这和本章习题 4 的结论发生矛盾。故当$3\mid F_n$时，则$n$一定是 4 的倍数，因而本习题得证。

8.解：首先我们来计算B_1，B_2，B_3，B_4。我们用“1”表示买 1 元钱蔬菜；用“2”表示买 2 元钱猪肉；用“二”表示买 2 元钱鸡蛋。例如使用记号（二，1，2）来表示 5 元钱的一种用法：第一天买的是 2 元钱鸡蛋，第二天买的是 1 元钱蔬菜，第三天买的是 2 元钱猪肉。

当我们只有 1 元钱时，则第一天只能买蔬菜，因为买猪肉或鸡蛋都需要 2 元钱，故得到 1 元钱的用法只有一种，即为(1)，所以我们有$B_1=1$。当我们有 2 元钱时，若第一天买蔬菜，则用去 1 元钱，还剩 1 元钱，则第二天只能还是买蔬菜，这是一种用法，即为(1，1)；若第一天买猪肉，则 2 元钱恰好用完，所以这也是一种用法，即为(2)；若第一天买鸡蛋，则 2 元钱恰好用完，所以这也是一种用法，即为(二)。故得到$B_2=3$。当我们有 3 元钱时，若第一天买蔬菜，则还剩余 2 元钱，这两元钱第二天还可以用来再买蔬菜，还剩 1 元钱，则这 1 元钱第三天只可以用来买蔬菜，这是一种用法，即为(1，1，1)；若第一天买蔬菜，则还剩余 2 元钱，这两元钱可以用来买猪肉，这也是一种用法，即为(1，2)；若第一天买蔬菜，则还剩余 2 元钱，这两元钱可以用来买鸡蛋，这

也是一种用法，即为（1，二）；若第一天买猪肉，则还剩 1 元钱，这 1 元钱只能用来买蔬菜，这是一种用法，即为(2，1)；若第一天买鸡蛋，则还剩余 1 元钱，第二天只能用来买蔬菜，这也是一种用法，即为(二，1)。故得到$B_3=5$。当我们有 4 元钱时，使用同样的计算方法，可以得到它的所有用法是(1，1，1，1)，(1，1，2)，(1，1，二)，(1，2，1)，(1，二，1)，(2，1，1)，(2，2)，(2，二)，(二，1，1)，(二，2)，(二，二)，即得到$B_4=11$。所以我们有

$$B_1=1,\ B_2=3,\ B_3=5,\ B_4=11$$

由于$B_3=5=3+2=B_2+2B_1$，$B_4=11=5+2\times3=B_3+2B_2$，所以当$1\leqslant n\leqslant4$时，$B_n$的数学式子已经求出来了。

现设有 n 元钱，（其中$n\geqslant5$），假定第一天买蔬菜，则用去 1 元钱，还剩$n-1$元钱，这$n-1$元钱的用法有B_{n-1}种；假定第一天买猪肉，则用去 2 元钱，还剩$n-2$元钱，这$n-2$元钱的用法为B_{n-2}种；假定第一天买鸡蛋，则用去 2 元钱，还剩$n-2$元钱，这$n-2$元钱的用法为B_{n-2}种。所以我们得到

$$B_n=B_{n-1}+B_{n-2}+B_{n-2}=B_{n-1}+2B_{n-2}$$

因而B_n的数学式子已经求出来了。

9.解：由已知条件，我们可以看出

$$B_2=3=2+1=2B_1+(-1)^2$$

$$B_3=5=6-1=2\times3+(-1)^3=2B_2+(-1)^3$$

$$B_4=11=10+1=2\times5+(-1)^4=2B_3+(-1)^4$$

所以我们猜想：当$n\geqslant2$时有

$$B_n=2B_{n-1}+(-1)^n \tag{3}$$

现在我们使用数学归纳法来证明(3)式是成立的。当$n=2$，3，4时，我们已经知道(3)式成立。因而我们假定$k\geqslant 4$而当$n=k$时，(3)式成立，即有$B_k=2B_{k-1}+(-1)^k$，也就是

$$2B_{k-1}=B_k-(-1)^k=B_k+(-1)^{k+1} \tag{4}$$

则当$n=k+1$时，将(4)式代入递推关系式$B_n=B_{n-1}+2B_{n-2}$中可以得到

$$\begin{aligned}B_{k+1}&=B_k+2B_{k-1}=B_k+B_k+(-1)^{k+1}\\&=2B_k+(-1)^{k+1}\end{aligned}$$

所以(3)式当$n=k+1$时也成立。因而由数学归纳法知道(3)式成立。

由于

$$B_1=1=\frac{4-1}{3}=\frac{2^{1+1}+(-1)^1}{3}$$

$$B_2=3=\frac{8+1}{3}=\frac{2^{2+1}+(-1)^2}{3}$$

$$B_3=5=\frac{16-1}{3}=\frac{2^{3+1}+(-1)^3}{3}$$

$$B_4=11=\frac{32+1}{3}=\frac{2^{4+1}+(-1)^4}{3}$$

因而当$1\leqslant n\leqslant 4$时，B_n的一般表达式已经求出来了。而当$n\geqslant 5$时，由(3)式，我们有

$$\begin{aligned}B_n&=2B_{n-1}+(-1)^n\\&=2[2B_{n-2}+(-1)^{n-1}]+(-1)^n\\&=2^2B_{n-2}+(-1)^{n-1}\cdot 2+(-1)^n\end{aligned}$$

$$=2^2[2B_{n-3}+(-1)^{n-2}]+(-1)^{n-1}\cdot 2+(-1)^n$$

$$=2^3B_{n-3}+(-1)^{n-2}\cdot 2^2+(-1)^{n-1}\cdot 2+(-1)^n$$

$$=\cdots$$

$$=2^{n-1}B_1+(-1)^2\cdot 2^{n-2}+(-1)^3\cdot 2^{n-3}+\cdots$$

$$+(-1)^{n-2}\cdot 2^2+(-1)^{n-1}\cdot 2+(-1)^n$$

$$=2^{n-1}+2^{n-2}-2^{n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot 2+(-1)^n$$

$$=2^{n-1}+\frac{2^{n-2}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=2^{n-1}+\frac{2^{n-1}\left[1+(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{3}$$

$$=\frac{4\cdot 2^{n-1}+(-1)^n}{3}$$

$$=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$$

因而本习题得解。

10：证明：由本章习题 9，我们有$B_n=\dfrac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$，又因为$B_n$是一个正整数，所以本习题得证。

11.解：由本章书中(53)式，我们有

$$x=(e^x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k-1\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\right)$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\right)$$

比较上式两边中的x的系数，即可得

$$B_0=1 \tag{5}$$

在本章书中的(58)式里取$n=2$，并由本章习题解答的(5)式，则我们有

$$B_1=-\frac{B_0}{2}=-\frac{1}{2} \tag{6}$$

在本章书中的(58)式里取$n=3$，并由本章习题解答的(5)和(6)式，我们有

$$B_2=-\frac{1}{3}(B_0+3B_1)=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{6} \tag{7}$$

在本章书中的(58)式里取$n=4$，并由本章习题解答的(5)到(7)式，我们有

$$B_3=-\frac{1}{4}(B_0+4B_1+6B_2)=-\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{2}+\frac{6}{6}\right)$$
$$=0 \tag{8}$$

在本章书中的(58)式里取$n=5$，并由本章习题解答的(5)到(8)式，我们有

$$B_4=-\frac{1}{5}(B_0+5B_1+10B_2+10B_3)$$
$$=-\frac{1}{5}\left(1-\frac{5}{2}+\frac{10}{6}+0\right)=-\frac{1}{30} \tag{9}$$

在本章书中的(58)式里取$n=6$，并由本章习题解答的(5)到(9)式，我们有

$$B_5=-\frac{1}{6}(B_0+6B_1+15B_2+20B_3+15B_4)$$

$$=-\frac{1}{6}\left(1-\frac{6}{2}+\frac{15}{6}+0-\frac{15}{30}\right)=0 \tag{10}$$

在本章书中的(58)式里取$n=7$，并由本章习题解答的(5)到(10)式，我们有

$$B_6=-\frac{1}{7}(B_0+7B_1+21B_2+35B_3+35B_4+21B_5)$$

$$=-\frac{1}{7}\left(1-\frac{7}{2}+\frac{21}{6}+0-\frac{35}{30}+0\right)=\frac{1}{42} \tag{11}$$

在本章书中的(58)式里取$n=8$，并由本章习题解答的(5)到(11)式，我们有

$$B_7=-\frac{1}{8}(B_0+8B_1+28B_2+56B_3+70B_4+56B_5+28B_6)$$

$$=-\frac{1}{8}\left(1-\frac{8}{2}+\frac{28}{6}+0-\frac{70}{30}+0+\frac{28}{42}\right)=0 \tag{12}$$

在本章书中的(58)式里取$n=9$，并由本章习题解答的(5)到(12)式，我们有

$$B_8=-\frac{1}{9}(B_0+9B_1+36B_2+84B_3+126B_4+126B_5+84B_6$$

$$+36B_7)$$

$$=-\frac{1}{9}\left(1-\frac{9}{2}+\frac{36}{6}+0-\frac{126}{30}+0+\frac{84}{42}+0\right)=-\frac{1}{30} \tag{13}$$

在本章书中的(58)式里取$n=10$，并由本章习题解答中的(5)到(13)式，我们有

$$B_9=-\frac{1}{10}(B_0+10B_1+45B_2+120B_3+210B_4+252B_5$$

$$+210B_6+120B_7+45B_8)$$

$$=-\frac{1}{10}\left(1-\frac{10}{2}+\frac{45}{6}+0-\frac{210}{30}+0+\frac{210}{42}+0-\frac{45}{30}\right)$$

$$=0 \tag{14}$$

在本章书中的(58)式里取$n=11$，并由本章习题解答的(5)到(14)式，我们有

$$B_{10}=-\frac{1}{11}(B_0+11B_1+55B_2+165B_3+330B_4+462B_5$$

$$+462B_6+330B_7+165B_8+55B_9)$$

$$=-\frac{1}{11}\left(1-\frac{11}{2}+\frac{55}{6}+0-\frac{330}{30}+0+\frac{462}{42}+0-\frac{165}{30}+0\right)$$

$$=\frac{5}{66} \tag{15}$$

由(5)到(15)式，知道本习题得解。

12.解：由本章书中定理 8 和本章习题解答中的(7)式，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}=\zeta(2)=(-1)^{1+1}\frac{(2\pi)^2B_2}{2\cdot(2!)}$$

$$=\frac{4\pi^2\cdot\frac{1}{6}}{4}=\frac{\pi^2}{6} \tag{16}$$

由本章书中定理 8 和本章习题解答中的(9) 式，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-4}=\zeta(4)=(-1)^{2+1}\frac{(2\pi)^4B_4}{2(4!)}$$

$$=-\frac{2^4\pi^4\left(-\frac{1}{30}\right)}{2\cdot 24}=\frac{\pi^4}{90} \tag{17}$$

由本章书中定理 8 和本章习题解答中的(11)式，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-6}=\zeta(6)=(-1)^{3+1}\frac{(2\pi)^6 B_6}{2(6!)}$$

$$=\frac{2^6\pi^6\cdot\frac{1}{42}}{2\cdot(6!)}=\frac{\pi^6}{945} \tag{18}$$

由本章书中定理 8 和本章习题解答中的(13)式，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-8}=\zeta(8)=(-1)^{4+1}\frac{(2\pi)^8 B_8}{2(8!)}$$

$$=-\frac{2^8\pi^8\left(-\frac{1}{30}\right)}{2(8!)}=\frac{\pi^8}{9450} \tag{19}$$

由本章书中定理 8 和本章习题解答中的(15)式，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-10}=\zeta(10)=(-1)^{5+1}\cdot\frac{(2\pi)^{10} B_{10}}{2(10!)}$$

$$=\frac{2^{10}\pi^{10}\cdot\frac{5}{66}}{2(10!)}=\frac{\pi^{10}}{93555} \tag{20}$$

由(16)到(20)式，知道本习题得解。

13.证明：

由于$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$和$B_0=1$，$B_1=-\frac{1}{2}$，所 以 我

们有

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=1-\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n+\frac{x}{2}$$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n \qquad (21)$$

我们令 $f(x)=\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}$，则有

$$f(-x)=\frac{-x}{e^{-x}-1}+\frac{-x}{2}=\frac{-xe^x}{1-e^x}-\frac{x}{2}$$

$$=\frac{x(e^x-1)+x}{e^x-1}-\frac{x}{2}=x+\frac{x}{e^x-1}-\frac{x}{2}$$

$$=\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=f(x)$$

故$f(x)$是偶函数，由此得到(21)式的右边也是偶函数，所以(21)式右边中的奇数项的系数都为0，即当$n\geqslant 1$时，我们有

$$B_{2n+1}=0$$

因而本习题得证。

14.证明：设集合$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则由$\left\{{n \atop n-2}\right\}$的定义知道它含有下列两种情况。

(i) 当存在有$n-3$个子集合，其中每个子集合都只包含有1个元素时，则一定还存在有1个子集合，它含有3个元素。这3个元素是由$a_1, a_2, \cdots, a_n$这n个元素中无序选出，故有$\binom{n}{3}$种选法。

(ii) 当存在有$n-4$个子集合，其中每个子集合都只包含有1个元素时，则一定还有两个子集合，其中每个子集合都包含有两个元素（这是因为这两个子集合都是非空的，并且其中任何一个子集合都不能只包含有1个元素，否则应归为第一种情况），从n个元素中无序选出4个元素的取法有$\binom{n}{4}$，而把4个元素分拆为两组，每组都含有2个元素的取法有3种（例如把a_1，a_2，a_3，a_4这4个元素分为两个子集合，而每个子集合都包含有2个元素的分法有$a_1a_2 \mid a_3a_4$，$a_1a_3 \mid a_2a_4$，$a_1a_4 \mid a_2a_3$这三种），故得到第二种情况下的分拆方法有$3\binom{n}{4}$种。

又假定存在有$n-k$（其中$k\geqslant 5$）个子集合其中每个子集合都只包含有1个元素，而其余的$k-2$个子集合，其中每个子集合都至少包含有2个元素，则由于$n-k+2(k-2)>n$而产生矛盾，因而不存在有这种情况。

根据加法原则，由(i)和(ii)，我们有

$$\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$$

我们又有

$$\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} = \binom{n}{3} + 3 \cdot \frac{n!}{(n-4)!4!}$$

$$= \binom{n}{3} + 3 \cdot \frac{n!(n-3)}{(n-3)!3!\cdot 4} = \binom{n}{3} + \frac{3}{4}\binom{n}{3}(n-3)$$

$$=\frac{1}{4}\binom{n}{3}(4+3n-9)=\frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-5)$$

因而本习题得证。

15. 证明：设集合$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则由$\left\{\begin{matrix} n \\ n-3 \end{matrix}\right\}$的定义，它包含有下面三种情况的分拆方法。

(i) 有$n-4$个子集合，其中每个子集合都只包含有1个元素，则一定还有1个子集合，它包含有4个元素。从n个元素中无序选出4个元素的方法有$\binom{n}{4}$种。

(ii) 有$n-5$个子集合，其中每个子集合都只包含有1个元素，则其余的两个子集合一定要包含有5个元素，其中每个子集合都至少包含有2个元素。从n个元素中无序选出5个元素的方法有$\binom{n}{5}$种，而把5个元素分拆为两个子集合，每个子集合包含的元素都不少于2个，这样的分法有10种（例如，设这5个元素为a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，则分法有$a_1a_2 \mid a_3a_4a_5$，$a_1a_3 \mid a_2a_4a_5$，$a_1a_4 \mid a_2a_3a_5$，$a_1a_5 \mid a_2a_3a_4$，$a_1a_2a_3 \mid a_4a_5$，$a_1a_2a_4 \mid a_3a_5$，$a_1a_2a_5 \mid a_3a_4$，$a_1a_3a_4 \mid a_2a_5$，$a_1a_3a_5 \mid a_2a_4$，$a_1a_4a_5 \mid a_2a_3$）故第二种情况下的分拆方法有$10\binom{n}{5}$种。

(iii) 有$n-6$个子集合，其中每个子集合都只包含有1个元素，则一定还有3个子集合要包含6个元素，其中每个子集合都要包含有2个元素。从n个元素中无序选出6个元

素的方法有$\binom{n}{6}$种，而 6 个元素分拆为 3 个子集合，其中每个子集合都包含有 2 个元素的方法有15种（例如设这 6 个元素为a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，则分法有：$a_1a_2 \mid a_3a_4 \mid a_5a_6$，$a_1a_2 \mid a_3a_5 \mid a_4a_6$，$a_1a_2 \mid a_3a_6 \mid a_4a_5$，$a_1a_3 \mid a_2a_4 \mid a_5a_6$，$a_1a_3 \mid a_2a_5 \mid a_4a_6$，$a_1a_3 \mid a_2a_6 \mid a_4a_5$，$a_1a_4 \mid a_2a_3 \mid a_5a_6$，$a_1a_4 \mid a_2a_5 \mid a_3a_6$，$a_1a_4 \mid a_2a_6 \mid a_3a_5$，$a_1a_5 \mid a_2a_3 \mid a_4a_6$，$a_1a_5 \mid a_2a_4 \mid a_3a_6$，$a_1a_5 \mid a_2a_6 \mid a_3a_4$，$a_1a_6 \mid a_2a_3 \mid a_4a_5$，$a_1a_6 \mid a_2a_4 \mid a_3a_5$，$a_1a_6 \mid a_2a_5 \mid a_3a_4$），故第三种情况下的分拆方法有$15\binom{n}{6}$种。

又假定存在有$n-k$（其中$k\geqslant 7$）个子集合，其中每个子集合都只含有 1 个元素，而剩余的$k-3$个子集合，其中每个子集合都至少含有 2 个元素。则由于$n-k+2(k-3)=n+k-6>n$而产生矛盾。因而不存在有这种情况。

根据加法原则，由(i)、(ii)和(iii)，我们得到

$$\left\{ {n \atop n-3} \right\} = \binom{n}{4} + 10\binom{n}{5} + 15\binom{n}{6}$$

所以本习题得证。

第六章

1. 证明：当 $2\leqslant l\leqslant 6$ 时我们有

$(n+2)^l - n^l = (n+1+1)^l - (n+1-1)^l$

$$
=\begin{cases}
4(n+1) & \text{当}l=2\text{时}\\
6(n+1)^2+2 & \text{当}l=3\text{时}\\
8(n+1)^3+8(n+1) & \text{当}l=4\text{时}\\
10(n+1)^4+20(n+1)^2+2 & \text{当}l=5\text{时}\\
12(n+1)^5+40(n+1)^3+12(n+1) & \text{当}l=6\text{时}
\end{cases} \quad (1)
$$

由于 $f_3(2)=1$，$f_5(2)=\frac{4-1}{3}=1$，$f_7(2)=\frac{3\times 2^2-4\times 2+2}{6}$ $=1$，$f_9(2)=\frac{2\times 2^3-5\times 2^2+6\times 2-3}{5}=1$，$f_{11}(2)=$ $\frac{2\times 2^4-8\times 2^3+17\times 2^2-20\times 2+10}{6}=1$，和$S_{2l+1}(1)=1$知道当 $n=1$ 时本习题结论成立。现在我们假设本习题结论当 n（其中$n\geqslant 1$）时是成立的而来证明本习题的结论对于$n+1$也成立，因而由数学归纳法就知道本习题的结论成立。

我们令 $F_{2l+1}(n)=(n+2)^2f_{2l+1}((n+1)(n+2))-n^2f_{2l+1}(n(n+1))$由本章书中的(49)式和本习题中的(1)式我们有

$$F_3(n)=(n+2)^2-n^2=4(n+1)$$

$$F_5(n)=\frac{(n+2)^2(2(n+1)(n+2)-1)-n^2(2n(n+1)-1)}{3}$$

$$=\frac{2(n+1)((n+2)^3-n^3)-((n+2)^2-n^2)}{3}$$

$$=\frac{2(n+1)(6(n+1)^2+2)-4(n+1)}{3}=4(n+1)^3$$

$$F_7(n)=\frac{(n+2)^2(3(n+1)^2(n+2)^2-4(n+1)(n+2)+2)}{6}$$

$$-\frac{n^2(3n^2(n+1)^2-4n(n+1)+2)}{6}$$

$$=\frac{3(n+1)^2((n+2)^4-n^4)-4(n+1)((n+2)^3-n^3)}{6}$$

$$+\frac{2((n+2)^2-n^2)}{6}$$

$$=\frac{3(n+1)^2[8(n+1)^3+8(n+1)]-4(n+1)(6(n+1)^2}{6}$$

$$\frac{+2)+8(n+1)}{6}$$

$$=4(n+1)^5$$

$$F_8(n)=\frac{(n+2)^2(2(n+1)^3(n+2)^3-5(n+1)^2(n+2)^2}{5}$$

$$\frac{+6(n+1)(n+2)-3)-n^2(2n^3(n+1)^3}{5}$$

$$\frac{-5n^2(n+1)^2+6n(n+1)-3)}{5}$$

$$=\frac{2(n+1)^3((n+2)^5-n^5)-5(n+1)^2((n+2)^4-n^4)}{5}$$

$$+\frac{6(n+1)((n+2)^3-n^3)-3((n+2)^2-n^2)}{5}$$

$$=\frac{2(n+1)^3(10(n+1)^4+20(n+1)^2+2)-5(n+1)^2(8(n}{5}$$

$$\frac{+1)^3+8(n+1))+6(n+1)(6(n+1)^2+2)-12(n+1)}{5}$$

$$=4(n+1)^7$$

$$F_{11}(n)=\frac{(n+2)^2(2(n+1)^4(n+2)^4-8(n+1)^3(n+2)^3}{6}$$

$$\frac{+17(n+1)^2(n+2)^2-20(n+1)(n+2)+10)}{6}$$

$$-\frac{n^2(2n^4(n+1)^4-8n^3(n+1)^3+17n^2(n+1)^2}{6}$$

$$-\frac{20n(n+1)+10)}{6}$$

$$=\frac{2(n+1)^4((n+2)^6-n^6)-8(n+1)^3((n+2)^5-n^5)}{6}$$

$$+\frac{17(n+1)^2((n+2)^4-n^4)-20(n+1)((n+2)^3}{6}$$

$$\frac{-n^3)+10((n+2)^2-n^2)}{6}$$

$$=\frac{2(n+1)^4(12(n+1)^5+40(n+1)^3+12(n+1))}{6}$$

$$-\frac{8(n+1)^3(10(n+1)^4+20(n+1)^2+2)}{6}$$

$$+\frac{17(n+1)^2(8(n+1)^3+8(n+1))}{6}$$

$$-\frac{20(n+1)(6(n+1)^2+2)+40(n+1)}{6}$$

$$=4(n+1)^9$$

故当$1\leqslant l\leqslant 5$时有$F_{2l+1}(n)=4(n+1)^{2l-1}$，即当 $1\leqslant l\leqslant 5$ 时我们有

$$(n+2)^2 f_{2l+1}((n+1)(n+2))$$
$$=n^2 f_{2l+1}(n(n+1))+4(n+1)^{2l-1} \qquad (2)$$

由(2)式我们得到

$$S_{2l+1}(n+1)=S_{2l+1}(n)+(n+1)^{2l+1}$$

$$=\frac{\bar{n}^2 f_{2l+1}(\bar{n})}{4}+(n+1)^{2l+1}$$

$$=\frac{(n+1)^2(n^2 f_{2l+1}(n(n+1))+4(n+1)^{2l-1})}{4}$$

$$=\frac{(\overline{n+1})^2 f_{2l+1}(\overline{n+1})}{4}$$

故本习题得证。

2.证明：当$1\leqslant l\leqslant 5$时则由习题 1 的解答中的(1)式我们有

$$(n+2)^l(2n+3)-n^l(2n+1)$$
$$=2(n+1)((n+2)^l-n^l)+(n+1+1)^l+(n+1-1)^l$$

$$
=\begin{cases}
6(n+1) & \text{当}l=1\text{时}\\
8(n+1)^2+2(n+1)^2+2 & \text{当}l=2\text{时}\\
2(n+1)(6(n+1)^2+2)+2(n+1)^3+6(n+1) & \\
 & \text{当}l=3\text{时}\\
2(n+1)(8(n+1)^3+8(n+1))+2(n+1)^4 & \\
\quad +12(n+1)^2+2 & \text{当}l=4\text{时}\\
2(n+1)(10(n+1)^4+20(n+1)^2+2)+2(n+1)^5 & \\
\quad +20(n+1)^3+10(n+1) & \text{当}l=5\text{时}
\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}
6(n+1) & \text{当}l=1\text{时}\\
10(n+1)^2+2 & \text{当}l=2\text{时}\\
14(n+1)^3+10(n+1) & \text{当}l=3\text{时}\\
18(n+1)^4+28(n+1)^2+2 & \text{当}l=4\text{时}\\
22(n+1)^5+60(n+1)^3+14(n+1) & \text{当}l=5\text{时}
\end{cases} \quad (3)
$$

由于 $f_2(2)=1$，$f_4(2)=\frac{3\times 2-1}{5}=1$，$f_6(2)=\frac{3\times 2^2-3\times 2+1}{7}=1$，$f_8(2)=\frac{5\times 2^3-10\times 2^2+9\times 2-3}{15}=1$，$f_{10}(2)=\frac{3\times 2^4-10\times 2^3+17\times 2^2-15\times 2+5}{11}=1$ 和 $S_{2l}(1)=1$ 知道本习题结论当 $n=1$ 时是成立的。现在我们假设本习题的结论对 n（其中 $n\geqslant 1$）是成立的而来证明本习题结论对于 $n+1$ 也成立，因而由数学归纳法就知道本习题的结论成立。

我们令 $F_{2l}(n)=(n+2)(2n+3)f_{2l}((n+1)(n+2))-n(2n+1)f_{2l}(n(n+1))$，则由本章书中的(50)式和本习题中

的(3)式我们有

$$F_2(n)=(n+2)(2n+3)-n(2n+1)=6(n+1)$$

$$F_4(n)=\frac{(n+2)(2n+3)(3(n+1)(n+2)-1)}{5}$$

$$-\frac{n(2n+1)(3n(n+1)-1)}{5}$$

$$=\frac{3(n+1)((n+2)^2(2n+3)-n^2(2n+1))}{5}$$

$$-\frac{((n+2)(2n+3)-n(2n+1))}{5}$$

$$=\frac{3(n+1)(10(n+1)^2+2)-6(n+1)}{5}$$

$$=6(n+1)^3$$

$$F_6(n)=\frac{(n+2)(2n+3)(3(n+1)^2(n+2)^2}{7}$$

$$-\frac{3(n+1)(n+2)+1)-n(2n+1)(3n^2(n+1)^2}{7}$$

$$-\frac{3n(n+1)+1)}{7}$$

$$=\frac{3(n+1)^2((n+2)^3(2n+3)-n^3(2n+1))}{7}$$

$$-\frac{3(n+1)((n+2)^2(2n+3)-n^2(2n+1))}{7}$$

$$-\frac{((n+2)(2n+3)-n(2n+1))}{7}$$

$$=\frac{3(n+1)^2(14(n+1)^3+10(n+1))}{7}$$

$$-\frac{3(n+1)(10(n+1)^2+2)+6(n+1)}{7}$$

$$=6(n+1)^5$$

$$F_8(n)=\frac{(n+2)(2n+3)(5(n+1)^3(n+2)^3}{15}$$

$$-\frac{10(n+1)^2(n+2)^2+9(n+1)(n+2)-3)}{15}$$

$$-\frac{n(2n+1)(5n^3(n+1)^3-10n^2(n+1)^2}{15}$$

$$+\frac{9n(n+1)-3)}{15}$$

$$=\frac{5(n+1)^3((n+2)^4(2n+3)-n^4(2n+1))}{15}$$

$$-\frac{10(n+1)^2((n+2)^3(2n+3)-n^3(2n+1))}{15}$$

$$+\frac{9(n+1)((n+2)^2(2n+3)-n^2(2n+1))}{15}$$

$$-\frac{3((n+2)(2n+3)-n(2n+1))}{15}$$

$$=\frac{5(n+1)^3(18(n+1)^4+28(n+1)^2+2)}{15}$$

$$-\frac{10(n+1)^2(14(n+1)^3+10(n+1))}{15}$$

$$+\frac{9(n+1)(10(n+1)^2+2)}{15}-\frac{3(6(n+1))}{15}$$

$$=6(n+1)^7$$

$$F_{10}(n)=\frac{(n+2)(2n+3)(3(n+1)^4(n+2)^4}{11}$$

$$-\frac{10(n+1)^3(n+2)^3+17(n+1)^2(n+2)^2}{11}$$

$$-\frac{15(n+1)(n+2)+5)-n(2n+1)(3n^4(n+1)^4}{11}$$

$$-\frac{10n^3(n+1)^3+17n^2(n+1)^2-15n(n+1)+5)}{11}$$

$$=\frac{3(n+1)^4((n+2)^5(2n+3)-n^5(2n+1))}{11}$$

$$-\frac{10(n+1)^3((n+2)^4(2n+3)-n^4(2n+1))}{11}$$

$$+\frac{17(n+1)^2((n+2)^3(2n+3)-n^3(2n+1))}{11}$$

$$-\frac{15(n+1)((n+2)^2(2n+3)-n^2(2n+1))}{11}$$

$$+\frac{5((n+2)(2n+3)-n(2n+1))}{11}$$

$$=\frac{3(n+1)^4(22(n+1)^5+60(n+1)^3+14(n+1))}{11}$$

$$-\frac{10(n+1)^3(13(n+1)^4+28(n+1)^2+2)}{11}$$

$$+\frac{17(n+1)^2(14(n+1)^3+10(n+1))}{11}$$

$$-\frac{15(n+1)(10(n+1)^2+2)}{11}+\frac{5(6(n+1))}{11}$$

$$=6(n+1)^9$$

故当$1\leqslant l\leqslant 5$时有，$F_{2l}(n)=6(n+1)^{2l-1}$，即当$1\leqslant l\leqslant 5$时我们有

$$(n+2)(2n+3)f_{2l}((n+1)(n+2))$$
$$=n(2n+1)f_{2l}(n(n+1))+6(n+1)^{2l-1} \qquad (4)$$

由(4)式我们得到

$$S_{2l}(n+1)=S_{2l}(n)+(n+1)^{2l}$$

$$=\frac{(2n+1)\tilde{n}f_{2l}(\tilde{n})}{6}+(n+1)^{2l}$$

$$=\frac{(n+1)(n(2n+1)f_{2l}(n(n+1))+6(n+1)^{2l-1})}{3}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)f_{2l}((n+1)(n+2))}{6}$$

$$=\frac{(2(n+1)+1)(n+1)f_{2l}(n+1)}{6}$$

故本习题得证。

3. 证明：当$7\leqslant l\leqslant 8$时我们有

$$(n+2)^l-n^l=(n+1+1)^l-(n+1-1)^l$$

$$=\begin{cases}14(n+1)^6+70(n+1)^4+42(n+1)^2+2 & \text{当}l=7\text{时}\\ 16(n+1)^7+112(n+1)^5+112(n+1)^3+16(n+1) & \text{当}l=8\text{时}\end{cases}\quad(5)$$

由于

$$f_{13}(2)$$

$$=\frac{30\times 2^5-175\times 2^4+574\times 2^3-1180\times 2^2+1382\times 2-691}{105}$$

$$=1$$

$$f_{15}(2)$$

$$=\frac{3\times 2^6-24\times 2^5+112\times 2^4-352\times 2^3+718\times 2^2}{12}$$

$$-\frac{840\times 2+420}{12}=1$$

和当$6\leqslant l\leqslant 7$时有$S_{2l+1}(1)=1$知道当$n=1$时，本习题结论成立。现在我们假设本习题结论对n（其中$n\geqslant 1$）是成立的，而来证明本习题结论对于$n+1$也成立，因而由数学归纳法就知道本习题结论是成立的。我们令

$$F_{2l+1}(n)=(n+2)^2f_{2l+1}((n+1)(n+2))-n^2f_{2l+1}(n(n+1))$$

由本章书中的(51)式及本章习题解答中的(1)和(5)式我们有

$$
\begin{aligned}
&F_{13}(n)\\
&=\frac{(n+2)^2}{105}(30(n+1)^5(n+2)^5-175(n+1)^4(n+2)^4\\
&+574(n+1)^3(n+2)^3-1180(n+1)^2(n+2)^2\\
&+1382(n+1)(n+2)-691)-\frac{n^2}{105}(30n^5(n+1)^5\\
&-175n^4(n+1)^4+574n^3(n+1)^3-1180n^2(n+1)^2\\
&+1382n(n+1)-691)\\
&=\frac{30(n+1)^5((n+2)^7-n^7)}{105}-\frac{175(n+1)^4((n+2)^6-n^6)}{105}\\
&+\frac{574(n+1)^3((n+2)^5-n^5)}{105}-\frac{1180(n+1)^2((n+2)^4-n^4)}{105}\\
&+\frac{1382(n+1)((n+2)^3-n^3)}{105}-\frac{691((n+2)^2-n^2)}{105}\\
&=\frac{30(n+1)^5(14(n+1)^6+70(n+1)^4+42(n+1)^2+2)}{105}\\
&-\frac{175(n+1)^4(12(n+1)^5+40(n+1)^3+12(n+1))}{105}\\
&+\frac{574(n+1)^3(10(n+1)^4+20(n+1)^2+2)}{105}\\
&-\frac{1180(n+1)^2(8(n+1)^3+8(n+1))}{105}\\
&+\frac{1382(n+1)(6(n+1)^2+2)}{105}-\frac{691(4(n+1))}{105}
\end{aligned}
$$

$$=4(n+1)^{11}$$

$$F_{15}(n)$$

$$=\frac{(n+2)^2}{12}(3(n+1)^6(n+2)^6-24(n+1)^5(n+2)^5$$

$$+112(n+1)^4(n+2)^4-352(n+1)^3(n+2)^3$$

$$+718(n+1)^2(n+2)^2-840(n+1)(n+2)+420)$$

$$-\frac{n^2}{12}(3n^6(n+1)^6-24n^5(n+1)^5+112n^4(n+1)^4$$

$$-352n^3(n+1)^3+718n^2(n+1)^2-840n(n+1)+420)$$

$$=\frac{3(n+1)^6((n+2)^8-n^8)}{12}-\frac{24(n+1)^5((n+2)^7-n^7)}{12}$$

$$+\frac{112(n+1)^4((n+2)^6-n^6)}{12}-\frac{352(n+1)^3((n+2)^5-n^5)}{12}$$

$$+\frac{718(n+1)^2((n+2)^4-n^4)}{12}-\frac{840(n+1)((n+2)^3-n^3)}{12}$$

$$+\frac{420((n+2)^2-n^2)}{12}$$

$$=\frac{3(n+1)^6(16(n+1)^7+112(n+1)^5+112(n+1)^3}{12}$$

$$+\frac{16(n+1))-24(n+1)^5(14(n+1)^6+70(n+1)^4}{12}$$

$$+\frac{42(n+1)^2+2)+112(n+1)^4(12(n+1)^5}{12}$$

$$+\frac{40(n+1)^{7}+12(n+1))-352(n+1)^{5}(10(n+1)^{4}}{12}$$

$$+\frac{20(n+1)^{2}+2)+718(n+1)^{2}(8(n+1)^{3}+8(n+1))}{12}$$

$$-\frac{840(n+1)(6(n+1)^{2}+2)}{12}+\frac{420(4(n+1))}{12}$$

$$=4(n+1)^{13}$$

故当$6\leqslant l\leqslant 7$时有$F_{2l+1}(n)=4(n+1)^{2l-1}$，即当$6\leqslant l\leqslant 7$ 时我们有

$$\begin{aligned}&(n+2)^{2}f_{2l+1}((n+1)(n+2))\\&=n^{2}f_{2l+1}(n(n+1))+4(n+1)^{2l-1}\end{aligned}\tag{6}$$

由(6)式我们得到

$$S_{2l+1}(n+1)=S_{2l+1}(n)+(n+1)^{2l+1}$$

$$=\frac{\bar{n}^{2}f_{2l+1}(\bar{n})}{4}+(n+1)^{2l-1}$$

$$=\frac{(n+1)^{2}(n^{2}f_{2l+1}(n(n+1))+4(n+1)^{2l-1})}{4}$$

$$=\frac{(\overline{n+1})^{2}f_{2l+1}(\overline{n+1})}{4}$$

故本习题得证。

4. 证明：当$l=6$时则由本章习题解答中的(1)式，我们有

$$(n+2)^{6}(2n+3)-n^{6}(2n+1)$$
$$=2(n+1)((n+2)^{6}-n^{6})+(n+1+1)^{6}+(n+1-1)^{6}$$

$$=2(n+1)(12(n+1)^5+40(n+1)^3+12(n+1))$$

$$+2(n+1)^6+30(n+1)^4+30(n+1)^2+2$$

$$=26(n+1)^6+110(n+1)^4+54(n+1)^2+2 \qquad (7)$$

当$l=7$时，则由本章习题解答中的(5)式我们有

$$(n+2)^7(2n+3)-n^7(2n+1)$$

$$=2(n+1)((n+2)^7-n^7)+(n+1+1)^7+(n+1-1)^7$$

$$=2(n+1)(14(n+1)^6+70(n+1)^4+42(n+1)^2+2)$$

$$+2(n+1)^7+42(n+1)^5+70(n+1)^3+14(n+1)$$

$$=30(n+1)^7+182(n+1)^5+154(n+1)^3+18(n+1) \qquad (8)$$

由于$f_{12}(2)$

$$=\frac{105\times 2^5-525\times 2^4+1435\times 2^3-2360\times 2^2+2073\times 2-691}{455}$$

$=1$,

$f_{14}(2)$

$$=\frac{3\times 2^6-21\times 2^5+84\times 2^4-220\times 2^3+359\times 2^2-315\times 2+105}{51}$$

$=1$

和当$6\leqslant l\leqslant 7$时有$S_{2l}(1)=1$知道当$n=1$时本习题结论成立。现在我们假设本习题结论对n（其中$n\geqslant 1$）是成立的，而来证明本习题结论对于$n+1$也成立，因而由数学归纳法就知道本习题结论是成立的。我们令

$$F_{2l}(n)=(n+2)(2n+3)f_{2l}((n+1)(n+2))$$

$$-n(2n+1)f_{2l}(n(n+1))$$

则由本章习题解答中的(3)、(7)和(8)式我们有

$$F_{12}(n)$$

$$=\frac{(n+2)(2n+3)}{455}(105(n+1)^5(n+2)^5$$

$$-525(n+1)^4(n+2)^4+1435(n+1)^3(n+2)^3$$

$$-2360(n+1)^2(n+2)^2+2073(n+1)(n+2)$$

$$-691)-\frac{n(2n+1)}{455}(105n^5(n+1)^5-525n^4(n+1)^4$$

$$+1435n^3(n+1)^3-2360n^2(n+1)^2+2073n(n+1)$$

$$-691)$$

$$=\frac{105(n+1)^5((n+2)^6(2n+3)-n^6(2n+1))}{455}$$

$$-\frac{525(n+1)^4((n+2)^5(2n+3)-n^5(2n+1))}{455}$$

$$+\frac{1435(n+1)^3((n+2)^4(2n+3)-n^4(2n+1))}{455}$$

$$-\frac{2360(n+1)^2((n+2)^3(2n+3)-n^3(2n+1))}{455}$$

$$+\frac{2073(n+1)((n+2)^2(2n+3)-n^2(2n+1))}{455}$$

$$-\frac{691((n+2)(2n+3)-n(2n+1))}{455}$$

$$=\frac{105(n+1)^5(26(n+1)^6+110(n+1)^4+54(n+1)^2+2)}{455}$$

$$-\frac{525(n+1)^4(22(n+1)^5+60(n+1)^3+14(n+1))}{455}$$

$$+\frac{1435(n+1)^3(18(n+1)^4+28(n+1)^2+2)}{455}$$

$$-\frac{2360(n+1)^2(14(n+1)^3+10(n+1))}{455}$$

$$+\frac{2073(n+1)(10(n+1)^2+2)}{455}-\frac{691(6(n+1))}{455}$$

$$=6(n+1)^{11}$$

$$F_{14}(n)$$

$$=\frac{(n+2)(2n+3)}{15}(3(n+1)^6(n+2)^6-21(n+1)^5(n+2)^5$$

$$+84(n+1)^4(n+2)^4-220(n+1)^3(n+2)^3$$

$$+359(n+1)^2(n+2)^2-315(n+1)(n+2)+105)$$

$$-\frac{n(2n+1)}{15}(3n^6(n+1)^6-21n^5(n+1)^5+84n^4(n+1)^4$$

$$-220n^3(n+1)^3+359n^2(n+1)^2-315n(n+1)+105)$$

$$=\frac{3(n+1)^6((n+2)^7(2n+3)-n^7(2n+1))}{15}$$

$$-\frac{21(n+1)^5((n+2)^6(2n+3)-n^6(2n+1))}{15}$$

$$+\frac{84(n+1)^4((n+2)^5(2n+3)-n^5(2n+1))}{15}$$

$$-\frac{220(n+1)^3((n+2)^4(2n+3)-n^4(2n+1))}{15}$$

$$+\frac{359(n+1)^2((n+2)^3(2n+3)-n^3(2n+1))}{15}$$

$$-\frac{315(n+1)((n+2)^2(2n+3)-n^2(2n+1))}{15}$$

$$+\frac{105((n+2)(2n+3)-n(2n+1))}{15}$$

$$=\frac{3(n+1)^6(30(n+1)^7+182(n+1)^5+154(n+1)^3}{15}$$

$$+\frac{18(n+1))-21(n+1)^5(26(n+1)^6+110(n+1)^4}{15}$$

$$+\frac{54(n+1)^2+2)+84(n+1)^4(22(n+1)^5+60(n+1)^3}{15}$$

$$+\frac{14(n+1))-220(n+1)^3(18(n+1)^4+28(n+1)^2+2)}{15}$$

$$+\frac{359(n+1)^2(14(n+1)^3+10(n+1))}{15}$$

$$-\frac{315(n+1)(10(n+1)^2+2)}{15}+\frac{105(6(n+1))}{15}$$

$$=6(n+1)^{13}$$

故当$6\leqslant l\leqslant 7$时有$F_{2l}(n)=6(n+1)^{2l-1}$，即当$6\leqslant l\leqslant 7$时，我们有

$$(n+2)(2n+3)f_{2l}((n+1)(n+2))$$

$$=n(2n+1)f_{2l}(n(n+1))+6(n+1)^{2l-1} \qquad (9)$$

由(9)式、我们得到

$$S_{2l}(n+1)=S_{2l}(n)+(n+1)^{2l}$$

$$=\frac{(2n+1)\bar{n}f_{2l}(\bar{n})}{6}+(n+1)^{2l}$$

$$=\frac{(n+1)(n(2n+1)f_{2l}(n(n+1))+6(n+1)^{2l-1})}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)f_{2l}((n+1)(n+2))}{6}$$

$$=\frac{(2(n+1)+1)(\overline{n+1})f_{2l}(\overline{n+1})}{6}$$

故本习题得证。

5. 证明：由本章习题解答中的(5)式我们有

$$(n+2)^8(2n+3)-n^8(2n+1)$$

$$=2(n+1)((n+2)^8-n^8)+(n+1+1)^8+(n+1-1)^8$$

$$=2(n+1)(16(n+1)^7+112(n+1)^5+112(n+1)^3$$

$$+16(n+1))+2(n+1)^8+56(n+1)^6+140(n+1)^4$$

$$+56(n+1)^2+2$$

$$=34(n+1)^8+280(n+1)^6+364(n+1)^4$$

$$+88(n+1)^2+2 \qquad (10)$$

由于$f_{16}(2)=\frac{1}{85}(15\times 2^7-140\times 2^6+770\times 2^5-2930\times 2^4+$

$7595\times2^3-12370\times2^2+10851\times2-3617)=1$和$S_{16}(1)=1$知道当$n=1$时本习题结论成立。现在我们假设本习题结论对$n$（其中$n\geqslant1$）时是成立的，而来证明本题结论对于$n+1$也成立，因而由数学归纳法知道本习题结论是成立的。我们令

$$F_{16}(n)=(n+2)(2n+3)f_{16}((n+1)(n+2))\\ -n(2n+1)f_{16}(n(n+1))$$

则由本章习题解答中的(3)、(7)、(8)和(10)式，我们有

$$\begin{aligned}&F_{16}(n)\\&=\frac{(n+2)(2n+3)}{85}(15(n+1)^7(n+2)^7-140(n+1)^6(n+2)^6\\&\quad+770(n+1)^5(n+2)^5-2930(n+1)^4(n+2)^4\\&\quad+7595(n+1)^3(n+2)^3-12370(n+1)^2(n+2)^2\\&\quad+10851(n+1)(n+2)-3617)-\frac{n(2n+1)}{85}(15n^7(n+1)^7\\&\quad-140n^6(n+1)^6+770n^5(n+1)^5-2930n^4(n+1)^4\\&\quad+7595n^3(n+1)^3-12370n^2(n+1)^2+10851n(n+1)-3617)\\&=\frac{15(n+1)^7((n+2)^8(2n+3)-n^8(2n+1))}{85}\\&\quad-\frac{140(n+1)^6((n+2)^7(2n+3)-n^7(2n+1))}{85}\\&\quad+\frac{770(n+1)^5((n+2)^6(2n+3)-n^6(2n+1))}{85}\\&\quad-\frac{2930(n+1)^4((n+2)^5(2n+3)-n^5(2n+1))}{85}\end{aligned}$$

$$+\frac{7595(n+1)^3((n+2)^4(2n+3)-n^4(2n+1))}{85}$$

$$-\frac{12370(n+1)^2((n+2)^3(2n+3)-n^3(2n+1))}{85}$$

$$+\frac{10851(n+1)((n+2)^2(2n+3)-n^2(2n+1))}{85}$$

$$-\frac{3617((n+2)(2n+3)-n(2n+1))}{85}$$

$$=\frac{15(n+1)^7(34(n+1)^8+280(n+1)^6+364(n+1)^4}{85}$$

$$+\frac{88(n+1)^2+2)-140(n+1)^6(30(n+1)^7+182(n+1)^5}{85}$$

$$+\frac{154(n+1)^3+18(n+1))+770(n+1)^5(26(n+1)^6}{85}$$

$$+\frac{110(n+1)^4+54(n+1)^2+2)}{85}$$

$$-\frac{2930(n+1)^4(22(n+1)^5+60(n+1)^3+14(n+1))}{85}$$

$$+\frac{7595(n+1)^3(18(n+1)^4+28(n+1)^2+2)}{85}$$

$$-\frac{12370(n+1)^2(14(n+1)^3+10(n+1))}{85}$$

$$+\frac{10851(n+1)(10(n+1)^2+2)}{85}-\frac{3617(6(n+1))}{85}$$

$$=6(n+1)^{15}$$

于是我们得到

$$(n+2)(2n+3)f_{16}((n+1)(n+2))$$
$$=n(2n+1)f_{16}(n(n+1))+6(n+1)^{15} \qquad (11)$$

由(11)式，我们有

$$S_{16}(n+1)=S_{16}(n)+(n+1)^{16}$$
$$=\frac{(2n+1)\bar{n}f_{16}(\bar{n})}{6}+(n+1)^{16}$$
$$=\frac{(n+1)(n(2n+1)f_{16}(n(n+1))+6(n+1)^{15})}{6}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)f_{16}((n+1)(n+2))}{6}$$
$$=\frac{(2(n+1)+1)(\overline{n+1})f_{16}(\overline{n+1})}{6}$$

因而本习题得证。

6.证明：我们有

$$(n+2)^9-n^9=(n+1+1)^9-(n+1-1)^9$$
$$=((n+1)^9+9(n+1)^8+36(n+1)^7+84(n+1)^6$$
$$+126(n+1)^5+126(n+1)^4+84(n+1)^3+36(n+1)^2$$
$$+9(n+1)+1)-((n+1)^9-9(n+1)^8+36(n+1)^7$$
$$-84(n+1)^6+126(n+1)^5-126(n+1)^4+84(n+1)^3$$
$$-36(n+1)^2+9(n+1)-1)$$
$$=18(n+1)^8+168(n+1)^6+252(n+1)^4+72(n+1)^2$$
$$+2 \qquad (12)$$

由于

$$f_{17}(2)=\frac{1}{45}(10\times 2^7-105\times 2^6+660\times 2^5-2930\times 2^4+9114\times 2^3-18555\times 2^2+21702\times 2-10851)=1$$

和$S_{17}(1)=1$，知道当$n=1$时本习题结论成立，现在我们假设本习题结论对n（其中$n\geqslant 1$）是成立的，而来证明本习题结论对于$n+1$也成立，因而由数学归纳法就知道本习题结论是成立的。我们令

$$F_{17}(n)=(n+2)^2f_{17}((n+1)(n+2))-n^2f_{17}(n(n+1))$$

由本章书中的(54)式及本章习题解答中的(1)、(5)和(12)式，我们有

$$F_{17}(n)$$

$$=\frac{(n+2)^2}{45}(10(n+1)^7(n+2)^7-105(n+1)^6(n+2)^6+660(n+1)^5(n+2)^5-2930(n+1)^4(n+2)^4+9114(n+1)^3(n+2)^3-18555(n+1)^2(n+2)^2+21702(n+1)(n+2)-10851)-\frac{n^2}{45}(10n^7(n+1)^7-105n^6(n+1)^6+660n^5(n+1)^5-2930n^4(n+1)^4+9114n^3(n+1)^3-18555n^2(n+1)^2+21702n(n+1)-10851)$$

$$=\frac{10(n+1)^7((n+2)^9-n^9)}{45}-\frac{105(n+1)^6((n+2)^8-n^8)}{45}$$

$$+\frac{660(n+1)^5((n+2)^7-n^7)}{45}-\frac{2930(n+1)^4((n+2)^6-n^6)}{45}$$

$$+\frac{9114(n+1)^3((n+2)^5-n^5)}{45}-\frac{18555(n+1)^2((n+2)^4-n^4)}{45}$$

$$+\frac{21702(n+1)((n+2)^3-n^3)}{45}-\frac{10851((n+2)^2-n^2)}{45}$$

$$=\frac{10(n+1)^7(18(n+1)^8+168(n+1)^6+252(n+1)^4}{45}$$

$$+\frac{72(n+1)^2+2)-105(n+1)^6(16(n+1)^7+112(n+1)^5}{45}$$

$$+\frac{112(n+1)^3+16(n+1))+660(n+1)^5(14(n+1)^6}{45}$$

$$+\frac{70(n+1)^4+42(n+1)^2+2)-2930(n+1)^4(12(n+1)^5}{45}$$

$$+\frac{40(n+1)^3+12(n+1))+9114(n+1)^3(10(n+1)^4}{45}$$

$$+\frac{20(n+1)^2+2)-18555(n+1)^2(8(n+1)^3+8(n+1))}{45}$$

$$+\frac{21702(n+1)(6(n+1)^2+2)}{45}-\frac{10851(4(n+1))}{45}$$

$$=4(n+1)^{16}$$

于是我们得到

$$(n+2)^2f_{17}((n+1)(n+2))$$

$$=n^2 f_{17}(n(n+1)) + 4(n+1)^{16} \tag{13}$$

由(13)式，我们有

$$S_{17}(n+1) = S_{17}(n) + (n+1)^{17}$$

$$= \frac{\bar{n}^2 f_{17}(\bar{n})}{4} + (n+1)^{17}$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n^2 f_{17}(n(n+1)) + 4(n+1)^{17})}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2 f_{17}((n+1)(n+2))}{4}$$

$$= \frac{(\overline{n+1})^2 f_{17}(\overline{n+1})}{4}$$

故本习题得证。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝组合数学
作者＝陈景润
页数＝２９３
ＳＳ号＝１１０２０４１６
出版日期＝１９８５年０３月第１版